ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS **129** (2002), 317–361

CERTAINES FORMES QUADRATIQUES DE DIMENSION AU PLUS 6 ET CORPS DES FONCTIONS EN CARACTÉRISTIQUE 2

PAR

AHMED LAGHRIBI

Faculté Jean Perrin, Rue Jean Souvraz - SP 18
F-62307 Lens, France
e-mail: laghribi@euler.univ-artois.fr

ABSTRACT

Let F be a field of characteristic 2. The aim of this paper is to study the isotropy of some F-quadratic forms of dimension ≤ 6 over the function field of a projective quadric.

TABLE DES MATIÈRES

Received February 28, 2000 and in revised form November 13, 2000

1. Introduction

Soit F un corps commutatif. Un important problème en théorie algébrique des formes quadratiques est le suivant:

PROBLÈME: *Etant donné φ une F-forme quadratique anisotrope de dimension ≥ 2, quelles sont les F-formes quadratiques ψ pour lesquelles $\varphi_{F(\psi)}$ devient isotrope où $F(\psi)$ est le corps des fonctions de la quadrique projective d'équation $\psi = 0$?*

C'est le théorème de réduction d'indice de Merkur'ev [25] qui a donné un renouveau à ce problème. Un important développement a été apporté à ce problème en caractéristique $\neq 2$ par plusieurs personnes, en l'occurence ce problème a été traité par D. Shapiro pour certaines formes de dimension ≤ 4 [27], par D. Leep pour certaines formes de dimension ≤ 4 et pour une forme d'Albert [20], par D. W. Hoffmann pour certaines formes de dimension ≤ 8 [7], [8], [10], par l'auteur pour certaines formes de dimension ≤ 8 [16], [17], [18], par N. Karpenko et O. Izhboldin pour des cas laissés ouverts par l'auteur et Hoffmann en dimension ≤ 8 [11], [12]. Aussi, Hoffmann a prouvé un résultat général qui permet de borner la dimension de ψ par rapport à celle de φ [9]. En ce qui concerne la caractéristique 2 ce problème n'a pas été beaucoup considéré à l'exception de certains résultats de classification établis par R. Baeza, P. Mammone et D. Shapiro [3], [2], [23] et [21]. Récemment, l'auteur et Mammone ont étendu le résultat général de Hoffmann [9] à la caractéristique 2 [19].

Dans la suite, et sauf mention expresse du contraire, F désignera un corps commutatif de caractéristique 2. Une F-forme quadratique φ s'écrit à isométrie près (voir la deuxième section pour les détails):

$$\varphi = [a_1, b_1] \perp \cdots \perp [a_r, b_r] \perp [c_1] \perp \cdots \perp [c_s] \perp [0] \perp \cdots \perp [0] \tag{1}$$

avec $[c_1] \perp \cdots \perp [c_s]$ anisotrope et $[\alpha, \beta]$ (resp. $[\alpha]$) désigne la forme quadratique $\alpha X^2 + XY + \beta Y^2$ (resp. la forme quadratique αX^2).

Pour φ comme dans l'équation (1) et lorsque $\dim \varphi = 2r + s$, on dit que φ est non dégénérée ou de type (r, s). Si φ est de type $(r, 0)$ (resp. de type (r, s) avec $s \geq 1$), alors on dit que φ est non singulière (resp. φ est singulière). Une forme de type $(0, s)$ est dite totalement singulière.

Le long de ce papier on va considérer que les formes quadratiques non dégénérées.

On va répondre complètement au problème précédent lorsque φ est anisotrope et qui vérifie l'une des conditions suivantes:

- φ est une forme d'Albert, c'est-à-dire, non singulière de dimension 6 et d'invariant d'Arf trivial.
- φ est de dimension 5 et de type $(2,1)$.
- φ est de dimension 4 et de type $(2,0)$ ou $(1,2)$.
- $\dim \varphi \leq 3$.

On désigne par $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ la forme bilinéaire $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i Y_i$. On note $W_q(F)$ le groupe de Witt des formes quadratiques non singulières, et $W(F)$ l'anneau de Witt des formes bilinéaires symétriques. On sait que $W_q(F)$ est un $W(F)$-module [3].

Une forme quadratique π est une n-forme de Pfister s'il existe $a_1, \dots, a_n \in F^*$, $b \in F$ tels que $\pi \cong \langle 1, a_1 \rangle \otimes \cdots \otimes \langle 1, a_n \rangle \otimes [1, b]$. Dans ce cas, on note $\pi = \langle\langle a_1, \dots, a_n, b]]$. On désigne par $P_n F$ l'ensemble des n-formes de Pfister et $GP_n(F) = \{\alpha\pi \mid \alpha \in F^*, \pi \in P_n F\}$.

Une forme bilinéaire B est une n-forme bilinéaire de Pfister s'il existe $a_1, \dots, a_n \in F^*$ tels que $B \cong \langle 1, a_1 \rangle \otimes \cdots \otimes \langle 1, a_n \rangle$. On note $BP_n F$ l'ensemble des n-formes bilinéaires de Pfister et $GBP_n F = \{\alpha\pi \mid \alpha \in F^*, \pi \in BP_n F\}$.

Si r est un entier et φ est une forme quadratique, on note $r \times \varphi = \underbrace{\varphi \perp \dots \perp \varphi}_{r \text{ fois}}$.

Pour K/F une extension de corps et φ une forme quadratique sur F, on désigne par φ_K la forme quadratique $\varphi \otimes K$.

A une forme quadratique φ de dimension $n \geq 1$, on associe l'anneau

$$A_\varphi = \frac{F[X_1, \dots, X_n]}{I(\varphi)}$$

où $I(\varphi)$ est l'idéal de $F[X_1, \dots, X_n]$ engendré par le polynôme P_φ donné par la forme quadratique φ. D'après [23, Proposition 3] et lorsque la forme φ n'est pas nulle, on a que P_φ est irréductible si et seulement si φ n'est ni de type $\mathbb{H} \perp k \times [0]$ ni de type $[a] \perp l \times [0]$ avec $a \in F^*$ et $\mathbb{H} = [0,0]$ est le plan hyperbolique. Lorsque c'est le cas, on désigne par $F(\varphi)$ le corps des fractions de A_φ, qu'on appelle le corps des fonctions de φ (ce corps est le corps des fonctions de la quadrique affine d'équation $\varphi = 0$). Remarquons que si φ est anisotrope, alors le corps $F(\varphi)$ est bien défini.

Définition 1.1: Soient $\xi \in W_q(F)$, $c_1, \dots, c_n \in F$ et $\psi = \xi \perp [c_1] \perp \cdots \perp [c_n]$.

(1) On dit que ψ est dominée par une forme quadratique φ, et on note $\psi \preccurlyeq \varphi$ s'il existe δ et $\xi_1, \dots, \xi_n$ des formes quadratiques tel qu'on ait les deux conditions suivantes:

(i) Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\xi_i = [c_i]$ ou $\xi_i = [c_i, d_i]$ pour un certain $d_i \in F$,

(ii) $\varphi \cong \xi \perp \xi_1 \perp \cdots \perp \xi_n \perp \delta$.

(2) On dit que ψ est faiblement dominée par φ s'il existe $a \in F^*$ tel que $a\psi \preccurlyeq \varphi$.

(3) On dit que ψ est une sous-forme de φ et on note $\psi < \varphi$ s'il existe une forme quadratique μ telle que $\varphi \cong \psi \perp \mu$.

Clairement on a les remarques suivantes.

Remarques: On garde les mêmes notations et hypothèses que dans la définition 1.1.

(1) Si φ est non singulière, alors pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$ $\dim \xi_i = 2$.

(2) Si V est l'espace sous-jacent à φ et $\psi \preccurlyeq \varphi$, alors il existe W un sous-espace de V tel que la restriction de φ à W soit la forme quadratique ψ.

(3) Si ψ est faiblement dominée par φ et si $F(\psi)$ existe, alors $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope.

Définition 1.2: Une forme quadratique φ est dite une voisine s'il existe $\pi \in P_nF$ tel que $\dim \varphi > 2^n$ et que φ soit faiblement dominée par π.

Dans la troisième section on va donner quelques propriétés sur les formes voisines et on va classifier complètement les formes voisines de dimension au plus 8.

Deux formes quadratiques φ et ψ, non nécessairement non singulières, sont dites équivalentes et on note $\varphi \sim \psi$ s'il existe deux entiers $r, s \geq 0$ tels que $\varphi \perp r \times \mathbb{H} \cong \psi \perp s \times \mathbb{H}$.

L'énoncé des résultats qu'on va donner est plus compliqué que ce qu'on connait en caractéristique $\neq 2$. Ceci est dû au fait que les formes ψ qui vérifient $\varphi_{F(\psi)}$ isotrope, seront classifiées suivant leur types.

1.1. Les formes d'Albert. Soient $a \in F$ et $b \in F^*$. On associe à l'algèbre de quaternions $Q = [a, b)$ sa forme norme $N_Q = [1, a] \perp b\,[1, a] \in P_1F$ [3]. Si Q_1 et Q_2 sont deux algèbres de quaternions, on associe à l'algèbre de biquaternions $A = Q_1 \otimes_F Q_2$ une forme quadratique γ_A de dimension 6, appelée forme d'Albert, et définie par $\gamma_A \perp \mathbb{H} = N_{Q_1} \perp -N_{Q_2}$. On note $\wp(F) = \{\wp(x) \mid x \in F\}$ où $\wp(x) = x^2 + x$ pour $x \in F$.

Définition 1.3: Une forme quadratique ψ anisotrope est dite de type **(I)** si ψ vérifie l'une des conditions suivantes:

- $\dim \psi \geq 7$,
- ψ est de dimension 6 mais pas une forme d'Albert,
- $\dim \psi = 5$ et ψ est de type (r, s) avec $s \geq 2$, ou une forme voisine.

Définition 1.4: Une forme quadratique φ anisotrope est dite de type exceptionnel s'il existe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in F^*$ tels que $\varphi \cong [1] \perp [\alpha_1] \perp [\alpha_2] \perp [\alpha_3]$ et que $[1] \perp [\alpha_1] \perp [\alpha_2]$ soit isotrope sur $F(\sqrt{\alpha_3})$.

On note $\mathrm{Exc}(F)$ l'ensemble des F-formes quadratiques de type exceptionnel et $\mathrm{GExc}(F) = \{\alpha\varphi \mid \alpha \in F^*,\ \varphi \in \mathrm{Exc}(F)\}$.

Remarquons que toute forme quadratique $[1] \perp [\alpha_1] \perp [\alpha_2] \perp [\alpha_1\alpha_2]$ est de type exceptionnel. Concernant l'isotropie d'une forme d'Albert, on a le théorème suivant.

THÉORÈME 1.1: *Soient φ une forme d'Albert anisotrope et ψ une forme quadratique anisotrope de dimension ≥ 2. Alors:*

(1) *Si ψ est de type* **(I)**, *ou totalement singulière de dimension 4 n'appartenant pas à $\mathrm{GExc}(F)$, alors $\varphi_{F(\psi)}$ est anisotrope.*

(2) *Supposons que $\dim\psi \in \{2,3,4,5,6\}$ et que ψ ne soit ni de type* **(I)** *ni dans GP_1F ni totalement singulière de dimension 4. Alors, $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si ψ est faiblement dominée par φ.*

(3) *Si $\psi = [1] \perp [\alpha_1] \perp [\alpha_2] \perp [\alpha_3] \in \mathrm{Exc}(F)$ avec $\eta := [1] \perp [\alpha_1] \perp [\alpha_2]$ isotrope sur $F(\sqrt{\alpha_3})$, alors $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si η est faiblement dominée par φ.*

(4) *Si $\psi \in P_1F$, alors $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si φ domine une voisine de ψ.*

1.2. LES FORMES QUADRATIQUES DE DIMENSION 5. En ce qui concerne la dimension 5, on va étudier uniquement l'isotropie des formes quadratiques anisotropes de type $(2,1)$. Si φ est voisine de $\pi \in P_2F$, de dimension 5 et de type $(2,1)$, alors on déduit par les propositions 3.1 et 3.4 que $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si ψ est faiblement dominée par π. Lorsque φ n'est pas voisine, de dimension 5 et de type $(2,1)$ on a la réponse suivante.

THÉORÈME 1.2: *Soient φ une forme quadratique anisotrope de dimension 5 et de type $(2,1)$ qui n'est pas voisine et ψ une forme quadratique anisotrope de dimension ≥ 2. Alors:*

(1) *Si ψ est de l'un des types suivants:*
- $\dim\psi = 2$,
- *ψ est de dimension 3 et de type $(1,1)$,*
- *ψ est non singulière de dimension 4 n'appartenant pas à GP_1F,*
- *ψ est de dimension 5 et de type $(2,1)$ qui n'est pas voisine,*

alors $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si ψ est faiblement dominée par φ.

(2) *Si ψ est de l'un des types suivants:*
- *ψ est de type* **(I)**,
- *ψ une forme d'Albert,*
- *ψ est totalement singulière de dimension 4 n'appartenant pas à $\mathrm{GExc}(F)$,*

alors $\varphi_{F(\psi)}$ est anisotrope.

(3) *Si ψ est de l'un des types suivants.*

- *ψ est de dimension 4 et de type $(1,2)$,*
- *ψ est totalement singulière de dimension 3,*

alors $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si il existe φ' une forme de dimension 5 et de type $(2,1)$, $\pi \in GP_2F$ telles que $\varphi \sim \pi \perp \varphi'$ et que ψ soit faiblement dominée par π et φ'.

(4) *Si $\psi \in P_1F$, alors $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si φ domine une voisine de ψ.*

(5) *Si $\psi = [1] \perp [\alpha_1] \perp [\alpha_2] \perp [\alpha_3] \in \mathrm{Exc}(F)$ avec $\eta := [1] \perp [\alpha_1] \perp [\alpha_2]$ isotrope sur $F(\sqrt{\alpha_3})$, alors $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si $\varphi_{F(\eta)}$ est isotrope.*

1.3. Les formes quadratiques de dimension 4. En ce qui concerne la dimension 4, on va étudier uniquement l'isotropie d'une forme quadratique anisotrope de type $(2,0)$ ou $(1,2)$.

Définition 1.5: Une forme quadratique ψ est dite de type **(II)** si elle vérifie l'une des conditions suivantes:

(1) ψ est une forme d'Albert,

(2) ψ est de dimension 5 et de type $(2,1)$ qui n'est pas voisine,

(3) ψ est singulière de dimension 4,

(4) ψ est totalement singulière de dimension 3.

Il est clair que les formes quadratiques de type **(I)** ou **(II)** s'excluent mutuellement.

Concernant l'isotropie d'une forme quadratique anisotrope de dimension 4 non singulière, on a le théorème suivant.

Théorème 1.3: *Soient φ une forme quadratique anisotrope de dimension 4 non singulière et ψ une forme quadratique anisotrope de dimension ≥ 2.*

(1) *Si ψ est de type* **(I)** *ou* **(II)**, *alors $\varphi_{F(\psi)}$ est anisotrope.*

(2) *Si ψ est de dimension ≤ 4 qui n'est ni de type* **(II)** *ni dans GP_1F, alors $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si ψ est faiblement dominée par φ.*

(3) *Si $\psi \in P_1F$, alors $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si φ domine une voisine de ψ.*

Concernant l'isotropie d'une forme quadratique anisotrope de dimension 4 et de type $(1,2)$, on a le théorème suivant.

THÉORÈME 1.4: *Soient φ une forme quadratique anisotrope de dimension 4 et de type $(1,2)$ et ψ une forme quadratique anisotrope de dimension ≥ 2. Alors:*

(1) *Si ψ est de l'un des types suivants:*

• $\dim \psi \geq 5$,

• *ψ est totalement singulière de dimension 4 n'appartenant pas à* $\mathrm{GExc}(F)$,

• *ψ est non singulière de dimension 4 n'appartenant pas à GP_1F,*

alors $\varphi_{F(\psi)}$ est anisotrope.

(2) *Si ψ est de l'un des types suivants:*

• *ψ est de dimension 4 et de type $(1,2)$,*

• *ψ est de dimension 3 ou non singulière de dimension 2,*

alors $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si ψ est faiblement dominée par φ.

• *Si ψ est singulière de dimension 2, alors $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si il existe ξ totalement singulière de dimension 3 qui est faiblement dominée par φ et qui domine ψ.*

(3) *Si $\psi \in P_1F$, alors $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si φ domine une voisine de ψ.*

(4) *Si $\psi = [1] \perp [\alpha_1] \perp [\alpha_2] \perp [\alpha_3] \in \mathrm{Exc}(F)$ avec $\eta := [1] \perp [\alpha_1] \perp [\alpha_2]$ isotrope sur $F(\sqrt{\alpha_3})$, alors $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si η est faiblement dominée par φ.*

1.4. LES FORMES QUADRATIQUES DE DIMENSION ≤ 3. En dimension 3, on a la réponse suivante.

THÉORÈME 1.4: *Soient φ une forme quadratique anisotrope de dimension 3 et ψ une forme quadratique anisotrope de dimension ≥ 2. Alors, on a:*

(1) *Supposons que φ soit de type $(1,1)$.*

(1) *Si $\dim \psi \geq 4$ et $\psi \notin GP_1F$ ou ψ est totalement singulière de dimension 3, alors $\varphi_{F(\psi)}$ est anisotrope.*

(2) *Si ψ est de dimension 3 et de type $(1,1)$ ou de dimension 2, alors $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si ψ est faiblement dominée par φ.*

(3) *Si $\psi \in P_1F$, alors $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si φ est voisine de ψ.*

(2) *Supposons que φ soit totalement singulière.*

(1) *Si ψ est de l'un des types suivants:*

• $\dim \psi \geq 4$ *et* $\psi \notin \mathrm{GExc}(F)$,

• *ψ est de dimension 3 et de type $(1,1)$,*

• *ψ est non singulière de dimension 2,*

alors $\varphi_{F(\psi)}$ est anisotrope.

(2) *Si ψ est singulière de dimension 2 ou totalement singulière de dimension 3, alors $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si ψ est faiblement dominée par φ.*

(3) *Si $\psi = [1] \perp [\alpha_1] \perp [\alpha_2] \perp [\alpha_3] \in \mathrm{Exc}(F)$ avec $\eta := [1] \perp [\alpha_1] \perp [\alpha_2]$ isotrope sur $F(\sqrt{\alpha_3})$, alors $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si η est semblable à φ.*

Dans le cas d'une forme quadratique de dimension 2, on a la réponse suivante.

PROPOSITION 1.1: *Soient φ une forme quadratique anisotrope de dimension 2 et ψ une forme quadratique anisotrope de dimension ≥ 2. Alors:*

(1) *Si $\dim \psi \geq 3$ ou ψ est de dimension 2 qui n'a pas le même type que φ, alors $\varphi_{F(\psi)}$ est anisotrope.*

(2) *Si φ et ψ sont non singulières, alors $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si φ est semblable à ψ.*

(3) *Si $\varphi = x([1] \perp [\alpha])$ et $\psi = y([1] \perp [d])$, alors $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si $[1] \perp [\alpha] \perp [d]$ est isotrope.*

Le plan de ce papier est le suivant. Après un rappel sur la théorie algébrique des formes quadratiques en caractéristique 2, on passe aux formes quadratiques voisines en démontrant quelques propriétés sur ces formes. Aussi, on classifie complètement les formes voisines de dimension ≤ 8. Dans la quatrième section, on donne des résultats préliminaires qui seront utiles dans les démonstrations. On va se baser de manière cruciale sur le théorème de réduction d'indice d'une algèbre simple centrale sur le corps des fonctions d'une quadrique en caractéristique 2 [24]; le théorème de Jacobson sur les formes d'Albert [13], [23]; un résultat de Knebusch qui donne une généralisation de la simplification de Witt [14, Proposition 1.2] (proposition 4.1); un théorème de Baeza sur les normes des formes quadratiques [5]; et la théorie de réduction de Springer en présence d'une valuation discrète en caractéristique 2 [5, Page 1341], [22, Section 2 et 3].

Remerciements. Ce travail a été fait durant mon séjour au département de mathématiques de la Faculté Jean Perrin. Je remercie cette institution pour l'aide et l'hospitalité que j'ai eues. Aussi, je tiens à remercier chaleureusement Pasquale Mammone pour les intéressantes discussions que j'ai eues avec lui durant la préparation de ce papier et pour ses commentaires sur une version antérieure.

2. Définitions et rappels

Pour plus de détails sur la théorie algébrique des formes quadratiques en caractéristique 2 on renvoie aux livres [3], [26].

Une forme quadratique de dimension n est la donnée d'un couple (V, φ) où V est un F-espace vectoriel de dimension n et φ: $V \longrightarrow F$ est une application telle que:

(i) $\varphi(\alpha v) = \alpha^2 \varphi(v)$ pour tout $\alpha \in F$ et $v \in V$,

(ii) L'application B_φ: $V \times V \longrightarrow F$, définie par: $B_\varphi(v, w) = \varphi(v+w) - \varphi(v) - \varphi(w)$ soit bilinéaire (symétrique).

Le radical de B_φ est $\mathrm{rad}(B_\varphi) = \{x \in V \mid B_\varphi(x, V) = 0\}$. Le radical de φ est $\mathrm{rad}(\varphi) = \{v \in \mathrm{rad}(B_\varphi) \mid \varphi(v) = 0\}$. Clairement, $\mathrm{rad}(B_\varphi)$ et $\mathrm{rad}(\varphi)$ sont des F-espaces vectoriels. On note $\mathrm{rb}(\varphi)$ (resp. $\mathrm{r}(\varphi)$) la dimension de $\mathrm{rad}(B_\varphi)$ (resp. la dimension de $\mathrm{rad}(\varphi)$). On a $0 \leq \mathrm{r}(\varphi) \leq \mathrm{rb}(\varphi)$. La forme bilinéaire B_φ est alternée, c'est-à-dire, $B_\varphi(v, v) = 0$ pour tout $v \in V$ et par conséquent l'entier $n - \mathrm{rb}(\varphi)$ est pair.

Soient r et s les entiers tels que $n - \mathrm{rb}(\varphi) = 2r$ et $\mathrm{rb}(\varphi) - \mathrm{r}(\varphi) = s$, alors on obtient à isométrie près

$$\varphi = [a_1, b_1] \perp \cdots \perp [a_r, b_r] \perp [c_1] \perp \cdots \perp [c_s] \perp \underbrace{[0] \perp \cdots \perp [0]}_{\mathrm{r}(\varphi) \text{ fois}}$$

où $[c_1] \perp \cdots \perp [c_s]$ est anisotrope.

Deux formes quadratiques φ et ψ sont dites semblables s'il existe $a \in F^*$ tel que $\varphi \cong a\psi$.

Si φ est non singulière on note $i_W(\varphi)$ l'indice de Witt de φ qui vérifie $\varphi \cong i_W(\varphi) \times \mathbb{H} \perp \varphi_{an}$ où φ_{an} est une forme quadratique anisotrope appelée partie anisotrope de φ.

Si φ est non singulière et $i_W(\varphi) = \frac{1}{2} \dim \varphi$, alors φ est dite hyperbolique.

On rappelle qu'une n-forme de Pfister π est multiplicative, c'est-à-dire, $D_F(\pi) = G_F(\pi)$ [3, Corollary 3.2, Page 105]. Aussi, une n-forme de Pfister est isotrope si et seulement si elle est hyperbolique [3, Chapter 4, Corollary 3.2]. Ce dernier résultat n'est pas en général vrai pour les n-formes bilinéaires de Pfister [3, Remark 3.3, Page 105].

Pour $n \geq 1$, on note $I^n W_q(F)$ le sous-groupe de $W_q(F)$ engendré par les formes de $GP_n F$.

On désigne par $\mathrm{Br}(F)$ le groupe de Brauer de F. Si D est une F-algèbre simple centrale de dimension finie, on note $\mathrm{ind}\, D$ l'indice de Schur de D. Deux F-algèbres simples centrales de dimension finie sont dites équivalentes et on note $D \sim D'$ si $[D] = [D'] \in \mathrm{Br}(F)$. Si D est déployée on note $D \sim 0$.

Pour $a, b \in F$ avec $b \neq 0$, on désigne par $[a, b)$ l'algèbre de quaternions dont la base standard $\{1, i, j, k\}$ vérifie les relations: $\wp(i) = a$, $j^2 = b$, $jij^{-1} = i + 1$ et $k = ij$.

Si φ est une forme quadratique de dimension n et d'espace sous-jacent V, l'algèbre de Clifford $C(\varphi)$ de φ est le quotient

$$C(\varphi) = \frac{T(V)}{J_\varphi},$$

où $T(V) = \bigoplus_{n\geq 0} V^{\otimes n}$ est l'algèbre tensorielle de V et J_φ est l'idéal bilatère de $T(V)$ engendré par les éléments $v \otimes v - \varphi(v)$. L'algèbre $C(\varphi)$ admet une $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduation induite par la graduation $T(V) = T^0(V) \bigoplus T^1(V)$ où $T^0(V) = \bigoplus_{n \text{ pair}} V^{\otimes n}$ et $T^1(V) = \bigoplus_{n \text{ impair}} V^{\otimes n}$. La partie paire $C_0(\varphi)$ de $C(\varphi)$ est appelée l'algèbre de Clifford paire de φ.

Si φ est non singulière, alors $C(\varphi)$ est une F-algèbre simple centrale et $C_0(\varphi)$ est de centre une F-algèbre quadratique séparable $Z(\varphi)$. Dans ce cas l'invariant d'Arf $\triangle(\varphi)$ de φ est la classe dans le groupe $F/\wp(F)$ d'un élément $\delta \in F$ tel que $Z(\varphi) = F(\wp^{-1}(\delta))$.

Pour $a_1, \ldots, a_n \in F^*$, $b_1, \ldots, b_n \in F$ et $\varphi = a_1[1, b_1] \perp \cdots \perp a_r[1, b_r]$, on a

$$C(\varphi) \sim [b_1, a_1) \otimes_F \cdots \otimes_F [b_r, a_r)$$

et

$$\triangle(\varphi) = b_1 + \cdots + b_r \in F/\wp(F).$$

Pour simplifier, on va souvent identifier $\triangle(\varphi)$ et son représentant dans $F/\wp(F)$.

3. Les formes quadratiques voisines en caractéristique 2

La proposition suivante permet de généraliser ce qu'on connait sur les formes voisines en caractéristique $\neq 2$.

PROPOSITION 3.1: (1) *Si ψ est voisine de π, alors ψ est isotrope si et seulement si π l'est aussi.*

(2) *Une forme quadratique qui est totalement singulière ne peut être une voisine.*

(3) *Si ψ est voisine de π et si $F(\pi)$ existe, alors $\psi_{F(\pi)}$ est isotrope.*

(4) *Si ψ est voisine de π, alors π est unique à isométrie près.*

(5) *Si $\pi \in P_nF$ et ψ sont anisotropes, alors ψ est voisine de π si et seulement si* $\dim \psi > 2^n$ *et $\pi_{F(\psi)}$ est isotrope.*

Dans ce qui suit on classifie complètement les formes quadratiques voisines de dimension ≤ 8.

PROPOSITION 3.2: *Soit ψ une forme quadratique anisotrope de dimension ≤ 8. Alors, on a les assertions suivantes:*

(1) *Si $\dim\psi \in \{2,3\}$, alors ψ est voisine si et seulement si ψ n'est pas totalement singulière.*

(2) *Si $\dim\psi = 4$, alors ψ est voisine si et seulement si $\psi \in GP_1F$.*

(3) *Si $\dim\psi = 5$, alors ψ est voisine si et seulement si ψ est de l'un des deux types suivants:*

- *ψ est de type $(2,1)$ et $\operatorname{ind} C_0(\psi) \leq 2$, ou*
- *$\psi = a[1,x] \perp [\alpha] \perp [\beta] \perp [\lambda]$ et $[x,a] \otimes_F L \sim 0$ où $L = F(\sqrt{\lambda\alpha}, \sqrt{\lambda\beta})$.*

(4) *Si $\dim\psi = 6$, alors ψ est voisine si et seulement si ψ est de l'un des deux types suivants:*

- *ψ est non singulière et $\psi_L \sim 0$ avec $L = F(\wp^{-1}(\triangle(\psi)))$, ou*
- *$\psi \cong \tau \perp [\alpha] \perp [\beta]$ avec $\tau \in GP_1F$ et $\tau_{F(\sqrt{\alpha\beta})} \sim 0$.*

(5) *Si $\dim\psi = 7$, alors ψ est voisine si et seulement si ψ est de type $(3,1)$ et $C_0(\psi) \sim 0$.*

(6) *Si $\dim\psi = 8$, alors ψ est voisine si et seulement si $\psi \in GP_2F$.*

Avant de démontrer les propositions 3.1 et 3.2 on commence par donner quelques résultats préliminaires.

PROPOSITION 3.3: *Soient φ une forme quadratique anisotrope totalement singulière de dimension ≥ 2 et ψ une forme quadratique anisotrope non singulière de dimension 2. Alors, $\varphi_{F(\psi)}$ est anisotrope.*

Preuve: Modulo un scalaire on pose $\psi = [1,d]$ pour un certain $d \in F$. On pose aussi $\varphi = [x_1] \perp \cdots \perp [x_n]$. Si $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope, alors φ_L est isotrope où $L = F(z)$ avec $z^2 + z = d$. Par conséquent, il existe $(k_1 + l_1 z, \ldots, k_n + l_n z) \in L^n$ non nul tel que

$$x_1(k_1 + l_1 z)^2 + \cdots + x_n(k_n + l_n z)^2 = 0.$$

L'extension L/F est quadratique car ψ est anisotrope. Un simple calcul montre que

$$\varphi(k_1, \ldots, k_n) = d\varphi(l_1, \ldots, l_n)$$

et

$$\varphi(l_1, \ldots, l_n) = 0.$$

Puisque φ est anisotrope, on déduit que $l_1 = \cdots = l_n = 0$ et donc $k_1 = \cdots = k_n = 0$, une contradiction. Ainsi, $\varphi_{F(\psi)}$ est anisotrope. ∎

Les corollaires suivants sont immédiats.

COROLLAIRE 3.1: *Soient φ une forme quadratique anisotrope totalement singulière de dimension ≥ 2 et ψ une forme quadratique anisotrope de dimension ≥ 2 et non singulière. Alors, $\varphi_{F(\psi)}$ est anisotrope.*

Preuve: Supposons que $\varphi_{F(\psi)}$ soit isotrope. Posons $\psi \cong \psi' \perp \psi''$ pour ψ' de dimension 2 et ψ'' une forme quadratique. Si $\psi = \psi'$, alors on utilise la proposition 3.3. Si $\dim \psi \geq 3$, alors $F(\psi')(\psi)/F(\psi')$ est transcendante pure [24, Lemma 1]. Ainsi, $\varphi_{F(\psi')}$ est isotrope, une contradiction avec la proposition 3.3. ∎

COROLLAIRE 3.2: *Soient φ une forme quadratique anisotrope de dimension ≥ 3 et ψ une forme quadratique anisotrope et non singulière de dimension ≥ 2. Si $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope, alors $F(\psi)(\varphi)/F(\psi)$ est transcendante pure.*

Preuve: Posons $\varphi = \varphi' \perp \varphi''$ avec φ' non singulière et φ'' totalement singulière. Par le corollaire 3.1 on a que $\varphi''_{F(\psi)}$ est anisotrope. Si $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope, alors on obtient par [24, Corollary 2] que $F(\psi)(\varphi)/F(\psi)$ est transcendante pure. ∎

COROLLAIRE 3.3: *Soient φ une forme quadratique anisotrope totalement singulière et ψ une forme quadratique anisotrope de dimension ≥ 2 qui n'est pas totalement singulière. Alors, $\varphi_{F(\psi)}$ est anisotrope.*

Preuve: Posons $\psi = \psi' \perp \psi''$ avec ψ' non singulière de dimension ≥ 2 et ψ'' totalement singulière. Si $\dim \psi = 2$, alors le corollaire se déduit de la proposition 3.3. Supposons que $\dim \psi \geq 3$ et que $\varphi_{F(\psi)}$ soit isotrope. Par le corollaire 3.2 $F(\psi')(\psi)/F(\psi')$ est transcendante pure. Ainsi, $\varphi_{F(\psi')}$ est isotrope, une contradiction avec le corollaire 3.1. ∎

COROLLAIRE 3.4: *Soient φ une forme quadratique anisotrope de dimension ≥ 3 et ψ une forme quadratique anisotrope de dimension ≥ 2 qui n'est pas totalement singulière. Si $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope, alors $F(\psi)(\varphi)/F(\psi)$ est transcendante pure.*

Preuve: Posons $\varphi = \varphi' \perp \varphi''$ avec φ' non singulière et φ'' totalement singulière. Par le corollaire 3.3 $\varphi''_{F(\psi)}$ est anisotrope. Si $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope, alors on déduit par [24, Corollary 2] que $F(\psi)(\varphi)/F(\psi)$ est transcendante pure. ∎

LEMME 3.1: *Soit $\varphi = x\,[1,a] \perp [y]$ une forme quadratique qui représente $z \in F$. Alors, $[y] \cong [z]$ ou bien il existe $r \in F$ tel que $\varphi \cong [z,r] \perp [y]$. En particulier, si φ est isotrope de type $(1,1)$ alors $\varphi \cong \mathbb{H} \perp [y]$.*

Preuve: Soient $u, w \in F^3$ tels que $\varphi(u) = z$ et $\mathrm{rad}(\mathrm{B}_\varphi) = Fw$.

(1) Si $u \in \mathrm{rad}(B_\varphi)$, alors il existe $e \in F$ tel que $u = ew$. Par conséquent, $[y] \cong [z]$.

(2) Si $u \notin \mathrm{rad}(B_\varphi)$, alors il existe $v \in F^3$ tel que $f := B_\varphi(u,v) \neq 0$. La famille $\{u, f^{-1}v, w\}$ est libre. En effet, si $\alpha, \beta, \lambda \in F$ tels que $\alpha u + \beta f^{-1}v + \lambda w = 0$, on obtient que $B_\varphi(\alpha u + \beta f^{-1}v + \lambda w, u) = \beta f^{-1}B_\varphi(u,v) = 0$, et donc $\beta = 0$. On en fait de même avec v pour montrer que $\alpha = 0$ et donc $\lambda = 0$. Dans la base $\{u, f^{-1}v, w\}$, on a $\varphi \cong [z,r] \perp [y]$ où $r = \varphi(f^{-1}v)$.

Si φ est de type $(1,1)$, alors $y \neq 0$. Si de plus φ est isotrope, alors on déduit par ce qui précède que $\varphi \cong \mathbb{H} \perp [y]$. ∎

La proposition suivante est l'analogue du théorème de la sous-forme de Cassels-Pfister en caractéristique $\neq 2$. On aboutit à cette proposition en utilisant un théorème de Baeza sur les normes des formes quadratiques [5].

PROPOSITION 3.4: *Soient $\varphi \in W_q(F)$ anisotrope et ψ une forme quadratique anisotrope (non nécessairement non singulière) telles que $\varphi_{F(\psi)}$ soit hyperbolique. Alors, ψ est faiblement dominée par φ. En particulier,* $\dim\psi \leq \dim\varphi$.

Preuve: Modulo un scalaire, on peut supposer que $1 \in D_F(\varphi)$. Posons

$$\psi = [a_1,b_1] \perp \cdots \perp [a_r,b_r] \perp [c_1] \perp \cdots \perp [c_s],$$
$$\eta = [a_1,b_1] \perp \cdots \perp [a_r,b_r],$$
$$\nu = [c_1] \perp \cdots \perp [c_s],$$

et $X_1, Y_1, \ldots, X_r, Y_r, Z_1, \ldots, Z_s$ des variables sur F de sorte que

$$\psi(X_1,Y_1,\ldots,X_r,Y_r,Z_1,\ldots,Z_s) = \sum_{i=1}^{r}(a_iX_i^2 + X_iY_i + b_iY_i^2) + \sum_{j=1}^{s} c_jZ_j^2.$$

Soient $K = F(Z_1,\ldots,Z_s)$ et $L = F(X_1,Y_1,\ldots,X_r,Y_r)$. Sur $\mathbb{N}^{2r+s}$ on choisit un ordre lexicographique de sorte que a_1 (resp. c_1) soit le cœfficient dominant du polynôme $\psi(X_1,Y_1,\ldots,X_r,Y_r,Z_1,\ldots,Z_s)$ lorsque $r \neq 0$ (resp. lorsque $r = 0$). Modulo un scalaire, on peut supposer que ce coefficient dominant est égal à 1. Puisque $\varphi_{F(\psi)}$ est hyperbolique, on déduit que le polynôme $\psi(X_1,Y_1,\ldots,X_r,Y_r,Z_1,\ldots,Z_s)$ est un facteur de similitude de φ_{KL} [5]. Puisque $1 \in D_F(\varphi)$, le polynôme

$$\psi(X_1,Y_1,\ldots,X_r,Y_r,Z_1,\ldots,Z_s)$$

est représenté par φ_{KL}.

(1) Si $s = 0$. Alors φ_L représente le polynôme $\psi(X_1, Y_1, \ldots, X_r, Y_r)$. D'après [2, Satz 3.5], on déduit que ψ est une sous-forme de φ.

(2) Si $r = 0$. Alors, φ_K représente le polynôme $\psi(Z_1, \ldots, Z_s)$. D'après [2, Satz 3.4] on déduit que $\psi \preccurlyeq \varphi$.

(3) Si $r \neq 0$ et $s \neq 0$. Alors $\dim \psi \geq 3$. Puisque $\psi_{F(\eta)}$ est isotrope, on déduit que $F(\eta)(\psi)/F(\eta)$ est transcendante pure (corollaire 3.4). Ainsi, $\varphi_{F(\eta)}$ est hyperbolique. Comme dans le cas (1), le polynôme $\sum_{i=1}^r (a_i X_i^2 + X_i Y_i + b_i Y_i^2)$ est représenté par φ_L. Par conséquent

$$\varphi \cong \eta \perp \mu$$

pour une certaine forme quadratique μ [2, Satz 3.5]. Puisque

$$\sum_{i=1}^{r} (a_i X_i^2 + X_i Y_i + b_i Y_i^2) + \sum_{j=1}^{s} c_j Z_j^2$$

est représenté par $\varphi \cong \eta \perp \mu$ sur KL, on déduit que le polynôme $\sum_{j=1}^s c_j Z_j^2$ est représenté par μ sur K [2, Lemma 3.7]. Par conséquent, la forme quadratique ν est dominée par μ [2, Satz 3.4]. D'où ψ est dominée par φ. ∎

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate de la proposition 3.4.

COROLLAIRE 3.5: *Soient π une forme de Pfister anisotrope et $\varphi \in W_q(F)$ anisotrope. Alors, $\varphi_{F(\pi)}$ est hyperbolique si et seulement si il existe une forme bilinéaire η telle que $\varphi \cong \eta \otimes \pi$.*

Preuve: Par la proposition 3.4 il existe $a \in F^*$ et $\psi \in W_q(F)$ tels que $\varphi \cong a\pi \perp \psi$. En repassant de nouveau au corps $F(\pi)$, on obtient que $\psi_{F(\pi)}$ est hyperbolique. On finit la preuve par une simple induction sur la dimension de φ. ∎

Preuve de la proposition 3.1: (1) Si ψ est isotrope, alors π l'est aussi. Réciproquement, si π est isotrope, alors π est hyperbolique et donc l'espace sous-jacent à π contient un sous-espace totalement isotrope de dimension 2^n [3, Theorem 4.6, Page 17]. Puisque $\dim \psi > 2^n$ et que ψ est faiblement dominée par π, on déduit que ψ est isotrope.

(2) Supposons que $\psi = [c_1] \perp \cdots \perp [c_s]$ soit voisine de $\pi \in P_n F$. Il existe $a \in F^*$ tel que $a\pi \cong [c_1, d_1] \perp \cdots \perp [c_s, d_s] \perp \delta$ pour certains $d_1, \ldots, d_s \in F$ et $\delta \in W_q(F)$. On a $2 \dim \psi > \dim \pi = 2 \dim \psi + \dim \delta$, et donc $\dim \delta < 0$, une contradiction.

(3) Puisque $\psi_{F(\pi)}$ est voisine de $\pi_{F(\pi)}$ qui est isotrope, on déduit par l'assertion (1) que $\psi_{F(\pi)}$ est isotrope.

(4) D'après l'assertion (1) il suffit de traiter le cas où ψ est anisotrope. Supposons que ψ soit anisotrope et voisine de π_1 et π_2. Lorsque $\dim \psi = 2$, on a que ψ est semblable à π_1 et π_2. Par conséquent, π_1 et π_2 sont semblables et donc $\pi_1 \cong \pi_2$. Supposons que $\dim \psi \geq 3$. Par l'assertion (3) $\psi_{F(\pi_2)}$ est isotrope et donc l'extension $F(\pi_2)(\psi)/F(\pi_2)$ est transcendante pure (corollaire 3.4). Puisque $(\pi_1)_{F(\psi)}$ est isotrope, on a $(\pi_1)_{F(\pi_2)}$ isotrope et donc hyperbolique. De la même manière on a $(\pi_2)_{F(\pi_1)}$ hyperbolique. Par la proposition 3.4 on déduit que π_1 est semblable à π_2 et donc $\pi_1 \cong \pi_2$.

(5) C'est une simple conséquence de la proposition 3.4 et de la définition d'une forme voisine. ∎

Preuve de la proposition 3.2: Soit ψ une forme quadratique anisotrope telle que $2 \leq \dim \psi \leq 8$. Si ψ est voisine, alors ψ n'est pas totalement singulière (proposition 3.1 (2)).

(1) Si $\dim \psi \in \{2, 3\}$ et ψ est voisine, alors ψ est de type $(1,0)$ (resp. de type $(1,1)$) lorsque $\dim \psi = 2$ (resp. lorsque $\dim \psi = 3$). La réciproque est évidente.

(2) Si ψ est voisine de dimension 4 de π. Puisque $2 \dim \psi > \dim \pi$, on déduit que $\dim \pi = 4$ et donc $\psi \in GP_1F$.

(3) Si ψ est de dimension 5 qui n'est pas totalement singulière, alors ψ est de type $(2,1)$ ou $(1,3)$.

(i) Si ψ est de type $(2,1)$. Ecrivons $\psi = a\,[1,b] \perp c\,[1,d] \perp [e]$. D'après [24, Lemma 2], on a $C_0(\psi) \sim [b, ae) \otimes_F [d, ce)$. Si ψ est voisine, alors il existe $\alpha \in F$ et $\beta \in F^*$ tels que

$$\pi := a\,[1,b] \perp c\,[1,d] \perp e\,[1,\alpha] \perp \beta\,[1, b+d+\alpha] \in GP_2F.$$

On a

$$C(\pi) \sim [b,a) \otimes_F [d,c) \otimes_F [\alpha, e) \otimes_F [b+d+\alpha, \beta) \sim 0.$$

Ainsi, $C_0(\psi) \sim [b+d+\alpha, e\beta)$, et donc $\operatorname{ind} C_0(\psi) \leq 2$. Réciproquement, si $\operatorname{ind} C_0(\psi) \leq 2$ alors il existe $x \in F$ et $y \in F^*$ tels que $C_0(\psi) \sim [x,y)$. Soit $\xi = ae\,[1,b] \perp ce\,[1,d] \perp [1, b+d+x] \perp y\,[1,x]$. On a $\xi \in IW_q(F)$ et $C(\xi) \sim 0$. D'après [3, Page 129], on a que $\xi \in P_2F$. Par conséquent ψ est voisine de ξ.

(ii) Si ψ est de type $(1,3)$. Modulo un scalaire, on suppose que $\psi = a\,[1,x] \perp [\alpha] \perp [\beta] \perp [1]$. Posons $L = F(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})$. Si ψ est voisine, alors il existe $y, z \in F$ tels que

$$\pi := a\,[1,x] \perp \alpha\,[1,y] \perp \beta\,[1,z] \perp [1, x+y+z] \in P_2F.$$

On a

$$C(\pi) \sim [x,a) \otimes_F [y,\alpha) \otimes_F [z,\beta) \sim 0.$$

Par conséquent, $[x,a)\otimes_F L \sim 0$. Réciproquement, supposons que $[x,a)\otimes_F L \sim 0$. Puisque ψ est anisotrope, la forme $[\alpha] \perp [\beta] \perp [1]$ l'est aussi, et donc $[L:F]=4$ (proposition 4.7). On obtient par [1, Theorem 28, page 108] qu'il existe $u,v \in F$ tel que $[x,a) \sim [u,\alpha) \otimes_F [v,\beta)$. On a $\pi := a\,[1,x] \perp \alpha\,[1,u] \perp \beta\,[1,v] \perp [1,x+u+v] \in IW_q(F)$ et $C(\pi) \sim 0$. Ainsi, $\pi \in P_2F$ et ψ est voisine de π.

(4) (i) Si ψ est non singulière de dimension 6. Posons $\triangle(\psi) = \triangle$ et $L = F(\wp^{-1}(\triangle))$. Supposons que ψ soit une voisine. Alors, il existe ξ une forme de dimension 2 non singulière telle que $\pi := \psi \perp \xi \in GP_2F$. Puisque $\triangle(\xi) = \triangle$ on déduit que ξ_L est isotrope et donc π_L est hyperbolique. Ainsi, ψ_L est aussi hyperbolique. Réciproquement, supposons que ψ_L soit hyperbolique. D'après [3, Theorem 4.2, Page 121], il existe $x,y,z \in F^*$ tel que $\psi \cong \langle x,y,z\rangle \otimes [1,\triangle]$. Il est clair que ψ est voisine de $\langle 1,xy,xz,yz\rangle \otimes [1,\triangle]$.

(ii) Si ψ est singulière de dimension 6. Supposons que ψ soit une voisine, alors ψ est de type $(2,2)$ car sinon ψ dominerait une voisine totalement singulière de dimension 5, ce qui n'est pas possible. Modulo un scalaire, on peut supposer que $\psi = \xi \perp [a] \perp [1]$ avec ξ une forme non singulière de dimension 4. Il existe $x \in F$ tel que $\xi \perp a\,[1,x] \perp [1, x+\triangle(\xi)] \in P_2F$. On a $C(\xi) \sim [x,a)$. Posons $\xi = \alpha\,[1,r] \perp \beta\,[1,s]$. Ainsi,

$$[r,\alpha) \otimes_F [s,\beta) \sim [x,a)\,. \tag{2}$$

D'après [4], [15], [29] il existe $z \in F$, $u,v \in F^*$ tel que

$$[r,\alpha) = [z,u)\,, \quad [s,\beta) = [z,v)\,. \tag{3}$$

De l'équation (3), on obtient

$$[1,r] \perp \alpha\,[1,r] \cong [1,z] \perp u\,[1,z] \tag{4}$$

et

$$[1,s] \perp \beta\,[1,s] \cong [1,z] \perp v\,[1,z]\,. \tag{5}$$

En ajoutant les équations (4) et (5), on obtient

$$\xi \sim u\,[1,z] \perp v\,[1,z] \perp [1,r+s]\,. \tag{6}$$

Dans l'équation (6) on ajoute de part et d'autre la forme $[1] \perp [a]$ et on utilise le lemme 3.1 et la simplification de Witt (proposition 4.1) pour déduire que

$\psi \cong u\,[1,z] \perp v\,[1,z] \perp [1] \perp [a]$. En combinant les équations (2) et (3), on déduit que $\tau := u\,[1,z] \perp v\,[1,z] \in GP_1F$ est hyperbolique sur $F(\sqrt{a})$. Réciproquement, supposons qu'il existe $\tau \in GP_1F$ tel que $\psi \cong \tau \perp [a] \perp [b]$ et $\tau_{F(\sqrt{ab})}$ soit hyperbolique. D'après [2, Page 182] on a $\tau \cong r\,\langle a,b\rangle \otimes [1,s]$ pour $r \in F^*$ et $s \in F$. Il est clair que ψ est voisine de $\langle\langle ab,r,s]] \in P_2F$.

(5) Si ψ est voisine de dimension 7. Alors ψ est nécessairement de type $(3,1)$ car sinon ψ dominerait une voisine totalement singulière de dimension 5, ce qui n'est pas possible. Posons $\psi = \xi \perp [a]$ avec ξ de dimension 6 non singulière. Ainsi, $\pi := a\xi \perp [1,\triangle(\xi)] \in P_2F$, et donc $C(\pi) \sim C(a\xi) \sim C_0(\psi) \sim 0$ [24, Lemma 2]. La réciproque est une conséquence de [3, Page 129].

(6) Si ψ est de dimension 8 et voisine de π. Puisque $2\dim\psi > \dim\pi$, on déduit que $\dim\pi = 8$ et donc $\psi \in GP_2F$. La réciproque est évidente. ∎

4. Résultats préliminaires

On va utiliser de manière cruciale une généralisation de la simplification de Witt. Ce résultat a été établi dans une version plus générale par Knebusch dans le cas des modules quadratiques libres sur un anneau local [14, Proposition 1.2].

Proposition 4.1 ([14, Proposition 1.2]): *Soient φ et ψ deux formes quadratiques (non nécessairement non singulières) et $\eta \in W_q(F)$ telles que $\varphi \perp \eta \cong \psi \perp \eta$. Alors, $\varphi \cong \psi$.*

En utilisant la proposition 4.1 il est clair qu'une forme non singulière φ est hyperbolique si et seulement si $\varphi \sim 0$.

Lemme 4.1: *Soient $a,b \in F$ avec $b \neq 0$. La forme quadratique $[1,a] \perp b\,[1,a]$ est anisotrope si et seulement si l'algèbre de quaternions $[a,b)$ est à division.*

Preuve: On a $C([1,a] \perp b\,[1,a]) \sim [a,b)$ et donc si $[a,b)$ est à division, alors $[1,a] \perp b\,[1,a]$ est anisotrope. Réciproquement, si $[a,b)$ n'est pas à division alors $[a,b) \sim 0$ et par [3, Page 129] $[1,a] \perp b\,[1,a]$ est hyperbolique. ∎

Proposition 4.2: *Soient $\psi = [a,b] \perp \xi$ et $\theta = \left[at^2+t+b\right] \perp \xi_{F(t)}$. Supposons que $\dim\xi \geq 1$ et que ψ soit anisotrope. Alors, θ est anisotrope sur $F(t)$ le corps des fractions rationnelles en la variable t sur F, et les corps $F(\psi)$ et $F(t)(\theta)$ sont isomorphes.*

Preuve: Voir [24, Proposition 4] et sa preuve. ∎

Le lemme suivant est bien connu, on le rappelle sans démonstration.

LEMME 4.2: *Soient* $\varphi, \psi \in W_q(F)$, $c_1, \dots, c_m$ *et* $z_1, \dots, z_m \in F$ *tels que*

$$\varphi \perp [c_1] \perp \cdots \perp [c_m] \cong \psi \perp [z_1] \perp \cdots \perp [z_m].$$

Alors, les familles $\{c_1, \dots, c_m\}$ *et* $\{z_1, \dots, z_m\}$ *engendrent le même* F^2*-espace vectoriel.*

Le lemme suivant généralise [26, Chapter 2, Lemma 14.2] à la caractéristique 2.

LEMME 4.3: *Soient* φ *une forme quadratique anisotrope non singulière de dimension* 4 *et* $L = F(\wp^{-1}(\triangle(\varphi)))$. *Alors,* φ_L *est anisotrope.*

Preuve: Posons $\triangle = \triangle(\varphi)$.

(1) Si $\triangle \in \wp(F)$, alors $\varphi \in GP_1F$ et $L = F$. On a par hypothèse que φ est anisotrope.

(2) Si $\triangle \notin \wp(F)$. Puisque $\triangle(\varphi_L) \in \wp(L)$, on a $\varphi_L \in GP_1L$. Si φ_L est isotrope alors elle est hyperbolique. Par le corollaire 3.5 on obtient que $\varphi \cong \xi \otimes [1, \triangle]$ pour une certaine forme bilinéaire ξ de dimension 2, et donc $\varphi \in GP_1F$ et $\triangle \in \wp(F)$, une contradiction. ∎

La proposition suivante généralise à la caractéristique 2 un résultat de Fitzgerald [6] sur le noyau de Witt du corps des fonctions d'une forme de dimension 4.

PROPOSITION 4.3: *Soient* ψ *une forme quadratique anisotrope non singulière de dimension* 4 *et* $\pi \in P_2F$ *anisotrope. Alors,* $\pi_{F(\psi)}$ *est isotrope si et seulement si* $\pi \cong \alpha \langle 1, \beta \rangle \otimes \psi$ *pour certains* $\alpha \in F^*$ *et* $\beta \in D_F([1, \triangle(\psi)])$.

Preuve: Posons $\triangle(\psi) = \triangle$. Puisque $\pi_{F(\psi)}$ est isotrope on obtient $\pi_{F(\psi)} \sim 0$. Soit $\alpha \in D_F(\psi)$. Par la multiplicativité d'une forme de Pfister et la proposition 3.4, il existe une forme η de dimension 4 tel que

$$\pi \cong \alpha\psi \perp \eta. \tag{7}$$

En particulier, $\triangle(\eta) = \triangle$ et $C(\alpha\psi) \sim C(\eta)$. D'après [23, Proposition 3.3] il existe $\beta \in F^*$ tel que $\eta = \beta\alpha\psi$. On obtient $C(\eta) \sim [\triangle, \beta) + C(\alpha\psi)$. Ainsi, $[\triangle, \beta) \sim 0$, et donc $\beta \in D_F([1, \triangle])$. La réciproque est évidente. ∎

LEMME 4.4: *Soient $\varphi = [1,a] \perp b\,[1,a] \in P_1F$ anisotrope et ψ_1, ψ_2 deux formes quadratiques de dimensions 3 qui sont dominées par φ. Alors, ψ_1 et ψ_2 sont semblables.*

Preuve: Les formes ψ_1 et ψ_2 sont nécessairement de type $(1,1)$. Pour $i = 1,2$, posons $\psi_i = [\alpha_i] \perp \beta_i\,[1,k_i]$ avec $\alpha_i, \beta_i, k_i \in F^*$. Puisque ψ_i est dominée par φ, on obtient que

$$\varphi \cong \alpha_i\,[1,k_i] \perp \beta_i\,[1,k_i]$$

pour $l_i \in F^*$. Puisque φ est multiplicative, on déduit que

$$\varphi \cong [1,k_i] \perp \alpha_i\beta_i\,[1,k_i].$$

Ainsi,

$$[1] \perp [1,k_1] \perp \alpha_1\beta_1\,[1,k_1] \cong [1] \perp [1,k_2] \perp \alpha_2\beta_2\,[1,k_2].$$

Par le lemme 3.1, on obtient que

$$[1] \perp \mathbb{H} \perp \alpha_1\beta_1\,[1,k_1] \cong [1] \perp \mathbb{H} \perp \alpha_2\beta_2\,[1,k_2].$$

Par la simplification de Witt (proposition 4.1), on déduit que $\psi_1 \cong \alpha_1\alpha_2\psi_2$. ∎

Pour étudier l'isotropie d'une forme φ anisotrope de dimension 4 et de type $(1,2)$ (resp. de dimension 3 et de type $(0,3)$), on va considérer de manière générique φ comme une sous-forme d'une forme non voisine anisotrope de dimension 5 et de type $(2,1)$ (resp. de dimension 4 et de type $(1,2)$). Les propositions 4.4 et 4.5 vont nous permettre ceci.

PROPOSITION 4.4: *Soit $\varphi = x\,[1,a] \perp [y] \perp [z]$ une forme quadratique anisotrope sur F. Alors, la forme d'Albert $\gamma = x\,[1,a] \perp y\,[1,t^{-1}] \perp z\,[1,a+t^{-1}]$ est anisotrope sur $F((t))$ le corps des séries formelles en la variable t sur F.*

Preuve: On suppose que γ est isotrope. On obtient

$$(8)\quad x(f_1^2+f_1f_2+af_2^2)+y(f_3^2+f_3f_4+t^{-1}f_4^2)+z(f_5^2+f_5f_6+(a+t^{-1})f_6^2)=0$$

pour certains $f_1,\ldots,f_6 \in F((t))$ non tous nuls. On peut supposer que $f_1,\ldots,f_6 \in F\,[[t]]$ et ne sont pas tous divisibles par t. En multipliant l'équation (8) par t et en réduisant modulo t, on obtient

$$yf_4(0)^2 + zf_6(0)^2 = 0.$$

Puisque $[y] \perp [z]$ est anisotrope, on déduit que f_4 et f_6 sont divisibles par t. En substituant $f_4 = tf_7$ et $f_6 = tf_8$ dans l'équation (8) et en réduisant modulo t, on obtient

$$x(f_1(0)^2 + f_1(0)f_2(0) + af_2(0)^2) + yf_3(0)^2 + zf_5(0)^2 = 0.$$

Puisque $x\,[1,a] \perp [y] \perp [z]$ est anisotrope, on déduit que f_1, f_2, f_3, f_5 sont tous divisibles par t. Par conséquent, $f_1, \dots, f_6$ sont tous divisibles par t, ce qui contredit notre hypothèse. Ainsi, γ est anisotrope. ∎

De la proposition 4.4 on déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE 4.1: *Avec les mêmes notations et hypothèses que dans la proposition 4.4, la forme* $\theta := x\,[1,a] \perp [z] \perp y\,[1,t^{-1}]$ *est non voisine et anisotrope sur* $F((t))$.

Preuve: Soit γ comme dans la proposition 4.4. On a $C(\gamma) \sim C_0(\theta)$ et θ est dominée par γ. Puisque γ est anisotrope, alors θ l'est aussi et $\operatorname{ind} C(\gamma) = 4$. Par la proposition 3.2 (3) θ n'est pas voisine. ∎

PROPOSITION 4.5: *Soit* $[x] \perp [y] \perp [1]$ *une forme quadratique anisotrope sur* F. *Alors, la forme* $x\,[1,t^{-1}] \perp [y] \perp [1]$ *est anisotrope sur* $F((t))$.

Preuve: On fait la même preuve que celle de la proposition 4.4. ∎

Pour l'isotropie d'une forme de dimension 4 et de type $(1,2)$, on aura aussi besoin de la proposition suivante.

PROPOSITION 4.6: *Soit* φ *une forme quadratique de dimension* 4, *de type* $(1,2)$ *et d'espace sous-jacent* V. *Soient* $u, v, w \in V$ *deux à deux orthogonaux. Supposons que la famille* $\{u, v, w\}$ *soit libre. Alors, la forme* $[\varphi(u)] \perp [\varphi(v)] \perp [\varphi(w)]$ *est dominée par* φ.

Preuve: Posons $W = Fu \oplus Fv \oplus Fw$. Soient e_1, e_2 une base du $\operatorname{rad}(B_\varphi)$. Si e_1 ou $e_2 \notin W$ (par exemple e_1), alors il est clair que la famille $\{e_1, u, v, w\}$ est libre et donc φ est totalement singulière, une contradiction. Ainsi, $\operatorname{rad}(B_\varphi) \subset W$. Soit $g \in V$ tel que $W = Fg \oplus \operatorname{rad}(B_\varphi)$. Ainsi, la restriction de φ à W implique que

$$[\varphi(u)] \perp [\varphi(v)] \perp [\varphi(w)] \cong [\varphi(g)] \perp [\varphi(e_1)] \perp [\varphi(e_2)]\,. \tag{9}$$

Puisque $g \notin \operatorname{rad}(B_\varphi)$, il existe $g' \in V$ tel que $B_\varphi(g, g') \neq 0$ (à scalaire près, on peut supposer que $B_\varphi(g, g') = 1$). Il est facile de voir que $\{g', g, e_1, e_2\}$ est libre. Ainsi, $\varphi \cong [\varphi(g), \varphi(g')] \perp [\varphi(e_1)] \perp [\varphi(e_2)]$, et donc par l'équation (9) $[\varphi(u)] \perp [\varphi(v)] \perp [\varphi(w)]$ est dominée par φ. ∎

On déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE 4.2: *Soit φ une forme quadratique anisotrope de dimension 4, de type $(1,2)$ et d'espace sous-jacent V. Soient $u, v \in V$ tels que la famille $\{u, v\}$ soit libre, $B_\varphi(u,v) = 0$ et $\varphi(u) = d\varphi(v)$ pour un certain $d \in F$. Alors, il existe ψ une forme de dimension 3 totalement singulière qui domine $[1] \perp [d]$ et qui est faiblement dominée par φ.*

Preuve: Posons $W = Fu \oplus Fv$. Soient e_1, e_2 une base du $\mathrm{rad}(B_\varphi)$. Si $W = \mathrm{rad}(B_\varphi)$, alors la proposition est évidente. Supposons que $\mathrm{rad}(B_\varphi) \not\subset W$. Alors, e_1 ou $e_2 \notin W$ (par exemple e_1). Clairement, la famille $\{e_1, u, v\}$ est libre, et la forme $[1] \perp [d]$ est faiblement dominée par $\psi := [\varphi(e_1)] \perp [\varphi(u)] \perp [\varphi(v)]$. La proposition 4.6 appliquée à la famille $\{e_1, u, v\}$ implique que ψ est dominée par φ. ∎

On donne certaines remarques concernant le lien entre les formes de $\mathrm{Exc}(F)$ et les extensions multiquadratiques inséparables.

PROPOSITION 4.7: *Soit $\varphi = [1] \perp [\alpha_1] \perp [\alpha_2]$. Alors, on a équivalence entre:*

(1) *φ est anisotrope;*

(2) $[F(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}) : F] = 4$.

Preuve: Ceci puisque $[F(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}) : F] \leq 2$ si et seulement si $\sqrt{\alpha_1} \in F(\sqrt{\alpha_2})$ ou $\sqrt{\alpha_2} \in F(\sqrt{\alpha_1})$ si et seulement si φ est isotrope. ∎

COROLLAIRE 4.3: *Soit $\varphi = [1] \perp [\alpha_1] \perp [\alpha_2] \perp [\alpha_3]$ anisotrope.*

(1) *On a que $[1] \perp [\alpha_1] \perp [\alpha_2]$ est isotrope sur $F(\sqrt{\alpha_3})$ si et seulement si $\sqrt{\alpha_3} \in F(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2})$.*

(2) *Si $[1] \perp [\alpha_1] \perp [\alpha_2]$ est isotrope sur $F(\sqrt{\alpha_3})$, alors la forme $[1] \perp [\alpha_j] \perp [\alpha_k]$ est isotrope sur $F(\sqrt{\alpha_i})$ pour tout $i \in \{1,2,3\}$ et $j, k \in \{1,2,3\} - \{i\}$.*

(3) *Si $\varphi \notin \mathrm{Exc}(F)$, alors $[F(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \sqrt{\alpha_3}) : F] = 8$.*

Preuve: (1) Posons $\psi = [1] \perp [\alpha_1] \perp [\alpha_2]$. Par la proposition 4.7, on a $\big[F(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}) : F\big] = 4$, de plus on a $\big[F(\sqrt{\alpha_3}) : F\big] = 2$. De nouveau par la proposition 4.7 on a ψ anisotrope sur $F(\sqrt{\alpha_3})$ si et seulement si

$$[F(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \sqrt{\alpha_3}) : F(\sqrt{\alpha_3})] = 4.$$

Ainsi, ψ anisotrope sur $F(\sqrt{\alpha_3})$ si et seulement si $[F(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \sqrt{\alpha_3}) : F] = 8$, c'est-à-dire, ψ anisotrope sur $F(\sqrt{\alpha_3})$ si et seulement si $\sqrt{\alpha_3} \notin F(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2})$.

(2) Par l'assertion (1), on a $F(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}) = F(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \sqrt{\alpha_3})$. Puisque $[F(\sqrt{\alpha_2}, \sqrt{\alpha_3}) : F] = 4$, on obtient $F(\sqrt{\alpha_2}, \sqrt{\alpha_3}) = F(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \sqrt{\alpha_3})$. En particulier, $\sqrt{\alpha_1} \in F(\sqrt{\alpha_2}, \sqrt{\alpha_3})$ et donc $[1] \perp [\alpha_2] \perp [\alpha_3]$ est isotrope sur $F(\sqrt{\alpha_1})$. De même on montre que $[1] \perp [\alpha_1] \perp [\alpha_3]$ est isotrope sur $F(\sqrt{\alpha_2})$.

(3) C'est la même preuve que celle de l'assertion (1). ∎

LEMME 4.5: *Soient ψ une forme anisotrope totalement singulière de dimension ≥ 3, η une sous-forme de ψ de dimension ≥ 2. Soit φ une forme quadratique telle que $\varphi_{F(\psi)}$ soit isotrope. Alors, $\varphi_{F(\eta)}$ est isotrope.*

Preuve: Posons $n = \dim \varphi$ et $k = \dim \psi$. Par induction sur l'entier $\dim \psi - \dim \eta$, il suffit de prouver le lemme lorsque $\dim \psi = \dim \eta + 1$. Posons $\psi = [a_1] \perp \cdots \perp [a_k]$ et $\eta = [a_1] \perp \cdots \perp [a_{k-1}]$. Soient $X_2, \ldots, X_k$ des variables sur F, $K = F(X_2, \ldots, X_k)$ et $d = -a_1^{-1}(a_2X_2^2 + \cdots + a_kX_k^2)$ de sorte que $F(\psi) = K(\sqrt{d})$. Supposons que $\varphi_{F(\psi)}$ soit isotrope. Soit $u = (\alpha_1 + \beta_1\sqrt{d}, \ldots, \alpha_n + \beta_n\sqrt{d}) \in F(\psi)^n$ non nul tel que $\varphi(u) = 0$. Quitte à réduire aux mêmes dénominateurs, on peut supposer que $\alpha_i, \beta_i \in F[X_2, \ldots, X_k]$. Après simplification, on peut supposer que les α_i, β_i ne sont pas tous divisibles par X_k. Remarquons que le corps $F(\eta)$ se déduit de $F(\psi)$ en spécialisant X_k en 0. Pour finir on spécialise X_k en 0 dans l'équation $\varphi(u) = 0$. ∎

Les deux résultats suivants nous seront utiles pour l'isotropie d'une forme d'Albert.

PROPOSITION 4.8: *Soient φ une forme d'Albert anisotrope et $\psi = [1] \perp [a_1] \perp [a_2] \perp [a_3]$ anisotrope. On suppose que $[F(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3}) : F] = 8$. Alors, $\varphi_{F(\psi)}$ est anisotrope. En particulier, φ est anisotrope sur le corps des fonctions d'une forme totalement singulière anisotrope de dimension 4 qui n'appartient pas à* GExc(F).

Preuve: Soit D l'algèbre à division équivalente à $C(\varphi)$. Supposons que $\varphi_{F(\psi)}$ soit isotrope. D'après le théorème 5.1 (1) l'algèbre D contient un sous-corps isomorphe à $L := F(\sqrt{a}_1, \sqrt{a}_2, \sqrt{a}_3)$, une contradiction car $\operatorname{ind} D = 4$ et $[L : F] = 8$. La deuxième affirmation du corollaire est une simple conséquence de la première et du corollaire 4.3 (3). ∎

PROPOSITION 4.9: *Soit $\psi = [1] \perp [a] \perp [b] \perp [c] \perp [d]$ anisotrope. Alors:*
(1) $\sqrt{c}$ *ou* $\sqrt{d} \notin F(\sqrt{a}, \sqrt{b})$.
(2) *Une forme d'Albert anisotrope reste anisotrope sur $F(\psi)$.*

Preuve: (1) Puisque ψ est anisotrope, on déduit que les éléments $1, a, b, c$ et d sont linéairement indépendants sur F^2 ($= \{x^2 \mid x \in F\}$). Comme $[F^2(a,b) : F^2] \leq 4$, on déduit que c et d n'appartiennent pas tous les deux à $F^2(a,b)$, c'est-à-dire, $\sqrt{c}$ ou $\sqrt{d} \notin F(\sqrt{a}, \sqrt{b})$.

(2) Par l'assertion (1) supposons que $\sqrt{c} \notin F(\sqrt{a}, \sqrt{b})$. Puisque $[F(\sqrt{a}, \sqrt{b}) : F] = 4$, on a alors $[F(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}) : F] = 8$ et par la proposition 4.8 une forme d'Albert reste anisotrope sur $\eta := [1] \perp [a] \perp [b] \perp [c]$, en particulier elle reste anisotrope sur $F(\varphi)$ par le lemme 4.5. ∎

Le résultat suivant permet de simplifier l'isotropie sur le corps des fonctions d'une forme quadratique de type exceptionnel.

PROPOSITION 4.10: *Soit $\psi = [1] \perp [\alpha_1] \perp [\alpha_2] \perp [\alpha_3] \in \mathrm{Exc}(F)$ avec $\eta := [1] \perp [\alpha_1] \perp [\alpha_2]$ isotrope sur $F(\sqrt{\alpha_3})$. Alors, $\eta_{F(\psi)}$ est isotrope.*

Preuve: Par la définition du corps $F(\psi)$, on déduit que $\eta_{F(\psi)}$ représente α_3. On écrit

$$\alpha_3 = f_0^2 + \alpha_1 f_1^2 + \alpha_2 f_2^2 \tag{10}$$

pour certains $f_0, f_1, f_2 \in F(\psi)$. Puisque $\eta_{F(\sqrt{\alpha_3})}$ est isotrope, on déduit par le corollaire 4.3 (1) que α_3 est représenté par $[1] \perp [\alpha_1] \perp [\alpha_2] \perp [\alpha_1\alpha_2]$ sur F. On écrit

$$\alpha_3 = g_0^2 + \alpha_1 g_1^2 + \alpha_2 g_2^2 + \alpha_1\alpha_2 g_3^2 \tag{11}$$

pour certains $g_0, g_1, g_2, g_3 \in F$. Puisque ψ est anisotrope, on déduit que $g_3 \neq 0$. En ajoutant les équations (10) et (11), on déduit que $\alpha_1\alpha_2$ est représenté par $\eta_{F(\psi)}$. Ainsi, $[1] \perp [\alpha_1] \perp [\alpha_2] \perp [\alpha_1\alpha_2]$ est isotrope sur $F(\psi)$ et donc $\left[F(\psi)(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}) : F(\psi)\right] < 4$. Par la proposition 4.7 on obtient que $\eta_{F(\psi)}$ est isotrope. ∎

Un des outils qu'on va utiliser dans ce papier est la théorie de réduction de Springer en présence d'une valuation discrète en caractéristique 2 [28]. Pour la commodité du lecteur on donne quelques rappels sur cette théorie [5, Page 1341], [22, Section 2 et 3]. En effet, soient K un corps commutatif de caractéristique 2 Hensélien pour une valuation discrète, d'anneau de valuation A et de corps résiduel $k = A/\pi A$ avec π une uniformisante, et φ une K-forme quadratique anisotrope, qui peut être singulière, d'espace sous-jacent V. Pour $i = 0, 1, 2$, on définit $M_i = \{x \in V \mid \varphi(x) \in \pi^i A\}$. Ces ensembles vérifient $M_2 \subset M_1 \subset M_0$, et sont des A-modules. On définit respectivement sur $V_0 := M_0/M_1$ et $V_1 := M_1/M_2$ les k-formes quadratiques $\varphi_0(x+M_1) = \varphi(x)+\pi A$ et $\varphi_1(y+M_2) = \pi^{-1}\varphi(y)+\pi A$ pour $(x, y) \in M_0 \times M_1$. Les k-formes quadratiques φ_0 et φ_1 sont anisotropes et appelées respectivement la première et la seconde forme résiduelle de φ. Ces formes résiduelles ne dépendent que de la classe d'isométrie de φ (et elles peuvent être singulières). Si de plus φ est non singulière, alors $\dim_k V_0 + \dim_k V_1 = \dim_K V$. Cette dernière égalité est aussi vraie si φ est singulière et $[K : K^2] = 2[k : k^2]$ [22, Section 2].

Pour notre cas, on va prendre pour K le corps $K = E((t))$ avec E un corps contenant F. Sans le préciser dans les démonstrations, on ne considère sur K que la valuation t-adique.

Voici un résultat général qu'on va utiliser pour la suite.

Proposition 4.11: *Soient $\eta \in W_q(F)$ et $\psi = [a_1] \perp \cdots \perp [a_n]$ deux formes quadratiques sur F. Soient $u_1, \ldots, u_n \in F((t))$ et ξ une forme sur $F((t))$ tels que $\varphi := rt^\epsilon(\xi \perp \eta \perp a_1\,[1, u_1] \perp \cdots \perp a_n\,[1, u_n])$ soit anisotrope sur $F((t))$ avec $\epsilon = 0$ ou 1 et $r \in F\,[[t]]$ une unité. Soit $\varphi_{\epsilon+1}$ la $(\epsilon + 1)$-ième forme résiduelle de φ (pour la valuation t-adique) et r' la classe résiduelle de r. Alors, l'espace sous-jacent à $\varphi_{\epsilon+1}$ contient un sous-espace auquel la restriction de $\varphi_{\epsilon+1}$ est la forme $r'(\eta \perp \psi)$.*

Preuve: On va faire la preuve dans le cas $\epsilon = 0$. L'argument est le même pour le cas $\epsilon = 1$. Notons V, W et U les sous-espaces sous-jacents à φ, η et ψ respectivement. Pour $k \in \{0, 1\}$, soient

$$\begin{aligned} V_k &= \{v \in V \mid \varphi(v) \in t^k F\,[[t]]\}, \\ W_k &= \{v \in W \otimes_F F((t)) \mid \eta(v) \in t^k F[[t]]\}, \\ U_k &= \{v \in U \otimes_F F((t)) \mid \psi(v) \in t^k F[[t]]\}. \end{aligned}$$

On peut voir W_0/W_1 et U_0/U_1 comme des sous-espaces vectoriels de V_0/V_1. Les premières formes résiduelles de $r\eta_{F((t))}$ et $r\psi_{F((t))}$ sont respectivement $r'\eta$ et $r'\psi$. Puisque $\eta \perp \psi$ est anisotrope (car φ l'est aussi), on obtient par [22, Lemma 2] que $(W_0/W_1) \cap (U_0/U_1) = \{0\}$ et que la restriction de φ_1 à $W_0/W_1 \oplus U_0/U_1$ est la forme $r'(\eta \perp \psi)$. ∎

5. Démonstrations

Pour les démonstrations, la stratégie est la suivante. On commence par démontrer le théorème 1.1, puis on se base sur ce théorème pour démontrer le théorème 1.2. La démonstration du théorème 1.3 sera faite de manière directe. Pour démontrer le théorème 1.4 (resp. le théorème 1.5 dans le cas d'une forme totalement singulière de dimension 3) on se ramène de manière générique au cas d'une forme anisotrope non voisine, de dimension 5 et de type $(2,1)$ (resp. on se ramène de manière générique au cas d'une forme de dimension 4 et de type $(1,2)$). Les démonstrations seront faites cas par cas.

Il est clair que si φ et ψ sont deux formes quadratiques anisotropes telles que ψ soit faiblement dominée par φ ou si $\psi \in P_1F$ et φ domine une voisine de ψ, alors $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope. Ainsi, on va éviter de repréciser ceci dans la majorité des preuves.

1 - Démonstration du théorème 1.1. D'après le théorème de Jacobson [13], [23] on sait que deux formes d'Albert associées à une même algèbre de biquaternions sont semblables. Pour étudier l'isotropie d'une forme d'Albert, on va utiliser de manière fréquente ce résultat de Jacobson. Aussi, on va utiliser le théorème de réduction d'indice d'une algèbre simple centrale sur le corps des fonctions d'une quadrique en caractéristique 2 [24]. Cette méthode a été utilisée par l'auteur [18] pour retrouver le résultat de Leep [20]. Mais ici la situation est plus compliquée. On commence par rappeller le théorème de réduction d'indice en caractéristique 2.

Théorèm 5.1 ([24, Lemma 3, Theorem 3 et 4]): *Soient F un corps commutatif de caractéristique 2, D une F-algèbre centrale à division de dimension finie, ψ une forme quadratique anisotrope de dimension ≥ 2. Alors, on a:*

(1) *Supposons $\psi = [a_1] \perp \cdots \perp [a_m] \perp [1]$. Alors $D_{F(\psi)}$ n'est pas à division si et seulement si D contient un sous-corps isomorphe à $F(\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_m})$.*

(2) *Supposons que $\psi = a_1[1,b_1] \perp \cdots \perp a_n[1,b_n] \perp [c_1] \perp \cdots \perp [c_m] \perp [1]$ avec $m \geq 0$. Alors, $D_{F(\psi)}$ n'est pas à division si et seulement si D contient une sous-algèbre isomorphe à $[b_1,a_1) \otimes \cdots \otimes [b_n,a_n) \otimes F(\sqrt{c_1}, \ldots, \sqrt{c_m})$.*

(3) *Supposons que ψ soit non singulière. Alors:*

(i) *Si $\triangle(\psi) \in \wp(F)$, alors $D_{F(\psi)}$ n'est pas à division si et seulement si $M_2(D)$ contient une sous-algèbre isomorphe à $C(\psi)$.*

(ii) *Si $\triangle(\psi) \notin \wp(F)$, alors $D_{F(\psi)}$ n'est pas à division si et seulement si D contient une sous-algèbre isomorphe à $C_0(\psi)$.*

Soient φ et ψ comme dans le théorème 1.1. Puisque φ est anisotrope, on a

$\operatorname{ind} C(\varphi) = 4$. Soit D une algèbre à division vérifiant $C(\varphi) \sim D$. Si $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope, alors $\operatorname{ind} D_{F(\psi)} \leq 2$.

PROPOSITION 5.1: *Soit ψ une forme quadratique anisotrope qui est de l'un des types suivants:*

(1) *ψ est totalement singulière de dimension 4 n'appartenant pas à* $\mathrm{GExc}(F)$,

(2) *ψ est voisine de dimension 5,*

(3) *ψ est de dimension 5 non voisine et de type (r,s) avec $s \geq 2$,*

(4) *ψ est de dimension 6 mais pas d'Albert,*

(5) $\dim \psi \geq 7$.

Alors, $\varphi_{F(\psi)}$ est anisotrope.

Preuve: Soit ψ comme dans la proposition.

(1) Supposons que ψ soit totalement singulière de dimension 4 n'appartenant pas à $\mathrm{GExc}(F)$: Par la proposition 4.8 on a que $\varphi_{F(\psi)}$ est anisotrope.

(2) Supposons que ψ soit une voisine de dimension 5: Soit $\pi \in P_2F$ la forme correspondante. On a que $\psi_{F(\pi)}$ est isotrope. Si $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope, alors $\varphi_{F(\pi)}$ l'est aussi. Par le théorème 5.1 (3)(i) $M_2(D)$ contient une sous-algèbre isomorphe à $C(\pi)$. Or $\dim_F C(\pi) = 2^8 > \dim_F M_2(D)$, une contradiction.

(3) Supposons que ψ soit de dimension 5 et de type (r,s) avec $s \geq 2$ mais non voisine: Alors, modulo un scalaire $\varphi \cong [1] \perp [\alpha] \perp [\beta] \perp \xi$ pour ξ une forme de dimension 2.

(3.1) Si ξ est singulière, alors par la proposition 4.9 $\varphi_{F(\psi)}$ est anisotrope.

(3.2) Si ξ est non singulière. Posons $\xi = a\,[1,b]$. Si $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope, alors le théorème 5.1 (2) implique que D contient une sous-algèbre isomorphe à $[b,a) \otimes_F F(\sqrt{\alpha},\sqrt{\beta})$. Puisque $[F(\sqrt{\alpha},\sqrt{\beta}) : F] = 4$ (proposition 4.7), on obtient $D \cong [b,a) \otimes_F F(\sqrt{\alpha},\sqrt{\beta})$, une contradiction.

(4) Supposons que ψ soit de dimension 6 mais pas d'Albert:

(4.1) Si ψ est totalement singulière. Soit η une sous-forme de ψ de dimension 5. Par la proposition 4.9 $\varphi_{F(\eta)}$ est anisotrope, et donc par le lemme 4.5 $\varphi_{F(\psi)}$ est anisotrope.

(4.2) Si ψ est singulière mais pas totalement singulière. Alors, ψ domine une forme μ qui n'est pas totalement singulière, de dimension 5 et de type (r,s) avec $s \geq 2$. Par le corollaire 3.4 l'extension $F(\mu)(\psi)/F(\mu)$ est transcendante pure. Par les cas **(2)** et **(3)**, la forme $\varphi_{F(\mu)}$ est anisotrope, et donc $\varphi_{F(\psi)}$ est aussi anisotrope.

(4.3) Si ψ est non singulière. Puisque $\dim_F C_0(\psi) = 2^5 > \dim_F D$, l'algèbre D ne peut contenir une sous-algèbre isomorphe à $C_0(\psi)$. Ainsi, le théorème 5.1 (3)(ii) implique que $\varphi_{F(\psi)}$ est anisotrope.

(5) Si ψ est de dimension au moins 7.

(5.1) Si ψ est totalement singulière, alors ψ domine une forme λ totalement singulière de dimension 5. Par le cas **(3.1)** la forme $\varphi_{F(\lambda)}$ est anisotrope, et donc par le lemme 4.5 $\varphi_{F(\psi)}$ est anisotrope.

(5.2) Si ψ n'est pas totalement singulière, alors ψ domine une forme ν de dimension 5 qui n'est pas totalement singulière, de type (r,s) avec $s \geq 2$. Par le corollaire 3.4 l'extension $F(\nu)(\psi)/F(\nu)$ est transcendante pure. Par les cas **(2)** et **(3)** la forme $\varphi_{F(\nu)}$ est anisotrope, et donc $\varphi_{F(\psi)}$ est anisotrope. ∎

A cette étape la première assertion du théorème est démontrée.

PROPOSITION 5.2: *Soit ψ une forme anisotrope telle que* $\dim\psi \in \{2,3,4,5,6\}$ *et que ψ ne soit ni de type* (**I**) *ni dans GP_1F ni totalement singulière de dimension 4. Alors, $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si ψ est faiblement dominée par φ.*

Preuve: Soit ψ comme dans la proposition. Supposons que $\varphi_{F(\psi)}$ soit isotrope.

(1) Si ψ est une forme d'Albert: Par le théorème 5.1 (3)(i) $M_2(D)$ contient une sous-algèbre isomorphe à $C(\psi)$. On a $\operatorname{ind} C(\psi) = 4$ et $C(\varphi) \sim D$. Ainsi, $C(\varphi) \sim C(\psi)$. D'après le théorème de Jacobson [13], [23] φ est semblable à ψ.

(2) Si ψ est une forme non singulière de dimension 4 et $\triangle(\psi) \notin \wp(F)$: Modulo un scalaire, on suppose $\psi = [1,r] \perp \alpha\,[1,s]$. Par hypothèse $r+s \notin \wp(F)$. On a $C_0(\psi) \cong [s,\alpha) \otimes_F F(\wp^{-1}(r+s))$ [24, Proposition 5]. Par le théorème 5.1 (3)(ii) D contient une sous-algèbre isomorphe à $C_0(\psi)$. Soit C le centralisateur de $[s,\alpha)$ dans D. On a

$$D \cong C \otimes_F [s,\alpha)\,.$$

Puisque $F(\wp^{-1}(r+s)) \subset C$, on obtient que $C \simeq [r+s,\beta)$ pour un certain $\beta \in F^*$. La forme $\eta = [1,r] \perp \alpha\,[1,s] \perp \beta\,[1,r+s]$ est une forme d'Albert qui vérifie $C(\eta) \sim C(\varphi)$. D'après le théorème de Jacobson [13], [23] on déduit que φ est semblable à η. Puisque $\psi < \eta$, on déduit que ψ est faiblement dominée par φ.

(3) Si ψ est une forme dimension 4 et de type $(1,2)$: Modulo un scalaire, on suppose $\psi = a\,[1,\alpha] \perp [\beta] \perp [1]$. Par le théorème 5.1 (2) D contient une sous-algèbre isomorphe à $[\alpha,a) \otimes_F F(\sqrt{\beta})$. Soit C' le centralisateur de $[\alpha,a)$ dans D. On a $D \cong [\alpha,a) \otimes_F C'$. Puisque $F(\sqrt{\beta}) \subset C'$, on déduit que $C' \simeq [b,\beta)$ pour un certain $b \in F$. La forme $\eta = a\,[1,\alpha] \perp \beta\,[1,b] \perp [1,\alpha+b]$ vérifie $C(\eta) \sim C(\varphi)$. Par le théorème de Jacobson [13], [23] on obtient que φ est semblable à η. Puisque ψ est dominée par η, on déduit que ψ est faiblement dominée par φ.

(4) Si ψ n'est pas voisine, de dimension 5 et de type $(2,1)$: Modulo un scalaire, on suppose $\psi = [1] \perp \psi'$ pour ψ' une forme de dimension 4 non singulière. On ne peut avoir $\triangle(\psi') \in \wp(F)$ car sinon $\psi' \in GP_1F$ et ψ serait voisine. L'extension $F(\psi')(\psi)/F(\psi')$ est transcendante pure, et par conséquent $\varphi_{F(\psi')}$ est isotrope. D'après le cas **(2)** il existe $a, b \in F^*$ tel que

$$a\varphi \cong \psi' \perp b\,[1, \triangle(\psi')]\,.$$

On a $C_0(\psi) \sim C(\psi')$ [24, Lemma 2]. Aussi, $C(\varphi) \sim C(\psi') \otimes_F [\triangle(\psi'), b)$. Par le théorème 5.1 (2) D contient une sous-algèbre isomorphe à $C(\psi')$. On a $\operatorname{ind} C(\psi') = 4$ car $C_0(\psi) \sim C(\psi')$ et ψ n'est pas une voisine. Ainsi, $D \sim C(\psi')$ et $[\triangle(\psi'), b) \sim 0$. Par conséquent, $[1, \triangle(\psi')] \cong b\,[1, \triangle(\psi')]$. Par l'équation (12) on obtient $a\varphi \cong \psi' \perp [1, \triangle(\psi')]$, ce qui implique que ψ est faiblement dominée par φ.

(5) Si ψ est totalement singulière de dimension 3: Modulo un scalaire, on suppose $\psi = [\alpha] \perp [\beta] \perp [1]$. Par le théorème 5.1 (1) D contient un sous-corps isomorphe à $F(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})$. Ainsi, l'algèbre D est déployée par $F(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})$. On a $\left[F(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}) : F\right] = 4$ (proposition 4.7). D'après [1, Theorem 28, page 108] il existe $r, s \in F$ tels que $D \sim [r, \alpha) \otimes_F [s, \beta)$. La forme

$$\eta := \alpha[1, r] \perp \beta[1, s] \perp [1, r + s]$$

est d'Albert et vérifie $C(\eta) \sim C(\varphi)$. D'après le théorème de Jacobson [13], [23] la forme η est semblable à φ, et donc ψ est faiblement dominée par η.

(6) Si ψ est de dimension 3 et de type $(1,1)$: Modulo un scalaire, on suppose $\psi = a\,[1, b] \perp [1]$. Par le théorème 5.1 (2) D contient une sous-algèbre isomorphe à $[b, a)$. Par conséquent, il existe $x \in F$, $y \in F^*$ tel que $D \simeq [b, a) \otimes_F [x, y)$. La forme $\eta' = a\,[1, b] \perp y\,[1, x] \perp [1, b + x]$ est d'Albert et vérifie $C(\eta') \sim C(\varphi)$. Toujours par le théorème de Jacobson [13], [23] la forme η' est semblable à φ et donc ψ est faiblement dominée par φ.

(7) Si $\dim \psi = 2$: Dans ce cas le théorème se déduit de [2, Page 182] (resp. de [3, Theorem 4.2, Page 121]) lorsque ψ est singulière (resp. lorsque ψ est non singulière). ∎

A cette étape la deuxième assertion du théorème est démontrée.

PROPOSITION 5.3: (1) *Si $\psi \in P_1F$, alors $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si φ domine une voisine de ψ.*

(2) *Si $\psi = [1] \perp [\alpha_1] \perp [\alpha_2] \perp [\alpha_3] \in \operatorname{Exc}(F)$ avec $\eta := [1] \perp [\alpha_1] \perp [\alpha_2]$ isotrope sur $F(\sqrt{\alpha_3})$, alors $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si η est faiblement dominée par φ.*

Preuve: Soit ψ comme dans la proposition. Supposons que $\varphi_{F(\psi)}$ soit isotrope.

(1) Si $\psi \in P_1F$: Posons $\psi = [1,a] \perp b\,[1,a]$ et soit $\rho = [1] \perp b\,[1,a]$ qui est une voisine de ψ. Puisque $F(\rho)(\psi)/F(\rho)$ est transcendante pure, on déduit que $\varphi_{F(\rho)}$ est isotrope. Par le cas **(6)** de la preuve de la proposition 5.2, il existe $c \in F^*$ tel que $c\rho \preccurlyeq \varphi$. La forme $c\rho$ est une voisine de ψ et dominée par φ.

(2) Supposons que $\psi = [1] \perp [\alpha_1] \perp [\alpha_2] \perp [\alpha_3] \in \mathrm{Exc}(F)$ avec $\eta := [1] \perp [\alpha_1] \perp [\alpha_2]$ isotrope sur $F(\sqrt{\alpha_3})$. Par le corollaire 4.3 (1) on a $\sqrt{\alpha_3} \in F(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2})$. Par le théorème 5.1, D contient un sous-corps isomorphe à $F(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}) = F(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \sqrt{\alpha_3})$. On finit la preuve comme dans le cas **(5)** de la preuve de la proposition 5.2 pour montrer que η est faiblement dominée par φ. Réciproquement si $\eta \preccurlyeq a\varphi$ pour un certain $a \in F^*$, alors en passant par l'algèbre de Clifford on voit que D contient un sous-corps isomorphe à $F(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2})$. Or $F(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}) = F(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \sqrt{\alpha_3})$. Alors, $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope par le théorème 5.1. ∎

Ainsi, le théorème est démontré.

2 - DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.2. Soient φ et ψ comme dans le théorème 1.2. Modulo un scalaire, on suppose $\varphi = [1,a] \perp \alpha\,[1,b] \perp [\beta]$. Soit $\gamma = [1,a] \perp \alpha\,[1,b] \perp \beta\,[1,a+b]$ une forme d'Albert associée à φ. Puisque φ n'est pas voisine on déduit que γ est anisotrope (proposition 3.2). Soient D l'algèbre à division associée à γ, et $\theta = \left[t^2+t+a\right] \perp \alpha\,[1,b] \perp \beta\,[1,a+b]$ définie sur $F(t)$. La forme θ n'est pas voisine car $C_0(\theta) \sim C_0(\varphi_{F(t)})$.

PROPOSITION 5.4: *Soit ψ une forme anisotrope qui est de l'un des types suivants:*

(1) $\dim \psi = 2$,

(2) *ψ est non singulière de dimension 4 n'appartenant pas à GP_1F,*

(3) *ψ est de dimension 5 et de type $(2,1)$ qui n'est pas voisine,*

(4) *ψ est de dimension 3 et de type $(1,1)$.*

Alors, $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si ψ est faiblement dominée par φ.

Preuve: Soit ψ comme dans la proposition. Supposons que $\varphi_{F(\psi)}$ soit isotrope.

(1) (i) Si ψ est une forme quadratique de dimension 2 non singulière: Modulo un scalaire, on pose $\psi = [1,d]$. Alors, φ_L est isotrope où $L = F(z)$ avec $z^2+z+d = 0$. Il existe $y = (\alpha_1+\beta_1 z, \ldots, \alpha_5+\beta_5 z) \in F(z)^5$ non nul tel que $\varphi(y) = 0$. Puisque ψ est anisotrope, l'extension L/F est quadratique. Un simple calcul montre que

$$\varphi(v) = d\varphi(w) \ \text{ et } \ B_\varphi(v,w) = \varphi(w) \tag{13}$$

où $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_5)$ et $w = (\beta_1, \ldots, \beta_5)$. On a $B_\varphi(v,w) \neq 0$, car sinon on aurait $\varphi(w) = 0$ et donc $\varphi(v) = 0$. Puisque φ est anisotrope on aurait $y = 0$, une contradiction. Ainsi, l'espace W engendré par $\{v, w\}$ est non singulier. D'après [3, Proposition 3.2, Page 10], on a $F^5 = W \oplus W^\perp$ où $W^\perp$ est l'orthogonal de W relativement à B_φ. En utilisant l'équation (13) on déduit que la restriction de φ à W est la forme $\varphi(w)\,[1, d]$. Ainsi, ψ est faiblement dominée par φ.

(ii) Si ψ est singulière de dimension 2. Modulo un scalaire, on peut supposer que $\psi = [1] \perp [d]$. Alors, φ_K est isotrope où $K = F(\sqrt{d})$. Comme dans le cas **(1)** on utilise le fait que l'extension K/F est quadratique pour montrer qu'il existe $x = (\alpha_1, \cdots, \alpha_5)$ et $y = (\beta_1, \ldots, \beta_5) \in F^5$ non tous deux nuls tels que $\varphi(x) = d\varphi(y)$ et $B_\varphi(x, y) = 0$. Soit $z \in F^5$ tel que $\mathrm{rad}(B_\varphi) = Fz$. Puisque $d \notin F^2$ (car ψ est anisotrope), on vérifie que $\{x, y\}$ est libre.

• Si $z \in V := Fx \oplus Fy$. Soit $z' \in F^5$ tel que $V = Fz \oplus Fz'$. Alors, la restriction de φ à V est

$$\varphi(y)([1] \perp [d]) \cong [\varphi(z)] \perp [\varphi(z')]\,. \tag{14}$$

Puisque $z' \notin \mathrm{rad}(B_\varphi)$, il existe $z'' \in F^5$ tel que $B_\varphi(z', z'') \neq 0$ (à scalaire près, on peut supposer que $B_\varphi(z', z'') = 1$). Clairement, la famille $\{z', z''\}$ est libre et l'espace $U := Fz' \oplus Fz''$ est non singulier. Ainsi, $F^5 = U \oplus U^\perp$ où $U^\perp$ est l'orthogonal de U relativement à B_φ. Remarquons que $z \in U^\perp$. Ainsi, la restriction de φ à $U^\perp$ est la forme $[\varphi(z)] \perp \xi$ avec ξ une forme de dimension 2 non singulière. Par conséquent,

$$\varphi \cong [\varphi(z'), \varphi(z'')] \perp \xi \perp [\varphi(z)]\,.$$

De l'équation (14) on déduit que la forme $[1] \perp [d]$ est faiblement dominée par φ.

• Si $z \notin V$, alors la famille $\{x, y, z\}$ est libre. Soit U' un supplémentaire de $Fx \oplus Fy \oplus Fz$. La restriction φ' de φ à $Fx \oplus Fy \oplus U'$ est une forme non singulière de dimension 4 (car φ est de type $(2, 1)$). Clairement, $\varphi'_{F(\psi)}$ est isotrope. Par le théorème 1.3 ψ est faiblement dominée par φ', et donc ψ est faiblement dominée par φ.

(2) Si ψ est non singulière de dimension 4 avec $\triangle(\psi) \notin \wp(F)$: Modulo un scalaire, on suppose $\psi = [1, a'] \perp \alpha' [1, b']$. Puisque $\gamma_{F(\psi)}$ est isotrope et $a' + b' \notin \wp(F)$, on déduit par le théorème 1.1 qu'il existe $e, \beta' \in F^*$ tel que

$$e\gamma \cong [1, a'] \perp \alpha' [1, b'] \perp \beta' [1, a' + b']\,. \tag{15}$$

Puisque $C_0(\varphi) \sim C(e\gamma)$, on déduit que

$$[a', \beta') \otimes_F [b', \alpha'\beta') \sim [a, \beta) \otimes_F [b, \alpha\beta)\,. \tag{16}$$

Considérons la forme

$$\eta := \beta\,[1,a] \perp \alpha\beta\,[1,b] \perp \beta'\psi \perp [1, a+b+a'+b'] .$$

Par l'équation (16), on déduit que $C(\eta) \sim 0$. Puisque $\eta \in IW_q(F)$ de dimension 10, il existe $x \in F^*$, $\pi \in P_2F$ ([3, Pages 129–130]) tel que

$$\eta \sim x\pi. \tag{17}$$

On a $i_W(\eta_{F(\psi)}) \geq 2$ et par conséquent $\pi_{F(\psi)} \sim 0$. D'après la proposition 4.3 on a $\pi \cong \psi \perp y\psi$ avec $y \in D_F([1, \Delta(\psi)])$. L'équation (17) implique que la forme $\eta' := \beta\,[1,a] \perp \alpha\beta\,[1,b] \perp y\beta'\psi \perp [1, a+b+a'+b']$ vérifie

$$\eta' \sim \langle x, \beta' \rangle \otimes \pi \in I^3W_q(F). \tag{18}$$

Le Hauptsatz d'Arason-Pfister [2, Satz 4.2] implique que

$$\eta' \sim 0.$$

Par le lemme 3.1, on a

$$\beta\,[1,a] \perp \alpha\beta\,[1,b] \perp y\beta'\psi \perp [1] \sim [1] .$$

C'est-à-dire,

$$[1,a] \perp \alpha\,[1,b] \perp [\beta] \sim y\beta\beta'\psi \perp [\beta] .$$

Par simplification de Witt (proposition 4.1), on déduit que $\varphi \cong [\beta] \perp y\beta\beta'\psi$, et donc ψ est faiblement dominée par φ.

(3) Si ψ n'est pas voisine, de dimension 5 et de type $(2,1)$: Modulo un scalaire, on suppose $\psi = [1,a'] \perp \alpha'\,[1,b'] \perp [\beta']$. La forme $\xi := [1,a'] \perp \alpha'\,[1,b']$ n'appartient pas à GP_1F car ψ n'est pas voisine. Puisque $F(\xi)(\psi)/F(\xi)$ est transcendante pure, la forme $\varphi_{F(\xi)}$ est isotrope. Par le cas **(2)**, il existe $x \in F^*$ tel que

$$\varphi \cong x\,[1,a'] \perp x\alpha'\,[1,b'] \perp [\beta] \tag{19}$$

Puisque $\gamma_{F(\psi)}$ est isotrope, il existe $f \in F^*$ tel que

$$f\gamma \cong [1,a'] \perp \alpha'\,[1,b'] \perp \beta'\,[1, a'+b'] .$$

On a

$$C_0(\varphi) \sim [a', x\beta) \otimes_F [b', x\alpha'\beta)$$

et

$$C(f\gamma) \sim [a', \beta') \otimes_F [b', \alpha'\beta') .$$

Puisque $C_0(\varphi) \sim C(\gamma) \sim C(f\gamma)$, on obtient que $[a'+b', x\beta\beta') \sim 0$. Par conséquent, $x\beta\beta'\,[1,a'] \perp [1,a'] \cong x\beta\beta'\,[1,b'] \perp [1,b']$, et donc

$$x\,[1,a'] \perp \beta\beta'\,[1,a'] \cong x\,[1,b'] \perp \beta\beta'\,[1,b'] . \tag{20}$$

De l'équation (20), on déduit que la forme

$$\pi := (x\,[1,a'] \perp x\alpha'\,[1,b']) \perp \beta\beta'([1,a'] \perp \alpha'\,[1,b'])$$

appartient à GP_2F. Puisque $\psi_{F(\psi)}$ et $\varphi_{F(\psi)}$ sont isotropes et $\xi_{F(\psi)}$ est anisotrope (théorème 1.3), on obtient que $\beta' \in D_{F(\psi)}([1,a'] \perp \alpha'\,[1,b'])$ et que $\beta \in D_{F(\psi)}(x\,[1,a'] \perp x\alpha'\,[1,b'])$ par l'équation (19). Ainsi, $\pi_{F(\psi)}$ est isotrope. Si π était anisotrope, ψ serait faiblement dominée par π et donc une voisine, une contradiction. Ainsi, $\pi \sim 0$ et donc $x\,[1,a'] \perp x\alpha'\,[1,b'] \cong \beta\beta'([1,a'] \perp \alpha'\,[1,b'])$. Avec l'équation (19) on obtient $\varphi \cong \beta\beta'\psi$.

(4) Si ψ est de dimension 3 et de type $(1,1)$: Modulo un scalaire, on suppose $\psi = [1] \perp \alpha'\,[1,a']$. Posons $\tau = [1,a'] \perp \alpha'\,[1,a'] \in P_1F$. Puisque $\gamma_{F(\psi)}$ est isotrope, il existe $r,s,z \in F^*$ tels que $r\gamma \cong [1,z] \perp \alpha'\,[1,a'] \perp s\,[1,a'+z]$. Puisque $C(r\gamma) \sim C(\gamma) \sim C_0(\varphi)$, on a

$$[a', s\alpha') \otimes_F [z,s) \sim [a,\beta) \otimes_F [b,\alpha\beta).$$

La forme

$$\mu := \beta\,[1,a] \perp \alpha\beta\,[1,b] \perp s\alpha'\,[1,a'] \perp s\,[1,z] \perp [1,a+b+a'+z]$$

est de dimension 10 et d'invariants d'Arf et de Clifford triviaux. Ainsi, il existe $\pi \in GP_2F$ tel que $\mu \sim \pi$. Puisque ψ est voisine de τ, les formes $\varphi_{F(\tau)}$ et $\psi_{F(\tau)}$ sont isotropes. On a $i_W(\mu_{F(\tau)}) \geq 2$ et donc $\pi_{F(\tau)} \sim 0$. Par le corollaire 3.5 il existe $e,f \in F$ tels que

$$\pi \cong \langle e,f\rangle \otimes \tau.$$

On a $\mu \perp \langle s, sef\rangle \otimes \tau \sim \langle 1, se\rangle \otimes \pi \in I^3W_q(F)$. Puisque $\dim(\mu \perp \langle s, sef\rangle \otimes \tau)_{an} \leq 14$, on obtient par le Hauptsatz d'Arason-Pfister que $\mu \perp \langle s, sef\rangle \otimes \tau \sim 0$, c'est-à-dire,

$$\beta\,[1,a] \perp \alpha\beta\,[1,b] \perp [1,a+b+a'+z] \cong sef\tau \perp s\,[1,a'+z] . \tag{21}$$

Dans l'équation (21) on ajoute de part et d'autre la forme [1] pour obtenir par le lemme 3.1

$$\beta\,[1,a] \perp \alpha\beta\,[1,b] \perp \mathbb{H} \perp [1] \cong sef\tau \perp s\,[1,a'+z] \perp [1] . \tag{22}$$

Ainsi, $\varphi \sim s\beta\,[1, a' + z] \perp [\beta] \perp sef\beta\tau$. La forme τ est anisotrope car ψ l'est aussi. Par raison de dimension la forme $s\beta\,[1, a' + z] \perp [\beta] \perp sef\beta\tau$ est isotrope, et donc $sef\beta\tau$ et $s\beta\,[1, a' + z] \perp [\beta]$ représentent un élément non nul u en commun. Par le lemme 3.1 on a l'un des cas suivants:

Cas 1: $s\beta\,[1, a' + z] \perp [\beta] \cong [u] \perp \xi$,

Cas 2: $s\beta\,[1, a' + z] \perp [\beta] \cong [\beta] \perp [u, v]$

pour certains $v \in F$ et ξ une forme de dimension 2.

• Supposons qu'on soit dans le cas 1. Puisque

$$sef\beta\tau \cong u\tau \cong \left[u, u^{-1}a'\right] \perp u\alpha'\,[1, a'],$$

on obtient par le lemme 3.1 que

$$s\beta\,[1, a' + z] \perp [\beta] \perp sef\beta\tau \cong \xi \perp \mathbb{H} \perp [u] \perp u\alpha'\,[1, a'].$$

Par la simplification de Witt (proposition 4.1) on obtient $\varphi \cong [u] \perp \xi \perp u\alpha'\,[1, a']$. Il est clair que ψ est faiblement dominée par φ.

• Supposons qu'on soit dans le cas 2. Alors

$$\begin{aligned} sef\beta\tau \perp [\beta] \perp s\beta\,[1, a' + z] &\sim u\,[1, a'] \perp u\alpha'\,[1, a'] \perp u\,[1, uv] \perp [\beta] \\ &\sim u\,[1, a' + uv] \perp u\alpha'\,[1, a'] \perp [\beta]. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\varphi \sim [\beta] \perp u\,[1, a' + uv] \perp u\alpha'\,[1, a']$, et donc

$$\varphi \cong [\beta] \perp u\,[1, a' + uv] \perp u\alpha'\,[1, a'].$$

Il est clair que ψ est faiblement dominée par φ ∎

A cette étape la première assertion du théorème est démontrée.

PROPOSITION 5.5: *Soit ψ une forme anisotrope qui est de l'un des types suivants:*

(1) *ψ est de type* **(I)** *ou totalement singulière de dimension* 4 *et n'appartenant pas à* GExc(F),

(2) *ψ est une forme d'Albert.*

Alors, $\varphi_{F(\psi)}$ est anisotrope.

Preuve: **(1)** Si ψ est de type **(I)** ou totalement singulière de dimension 4 mais n'appartenant pas à GExc(F): Alors par le théorème 1.1 $\gamma_{F(\psi)}$ est anisotrope et donc $\varphi_{F(\psi)}$ l'est aussi.

(2) Si ψ est une forme d'Albert: Supposons que $\varphi_{F(\psi)}$ soit isotrope, alors $\gamma_{F(\psi)}$ l'est aussi. Par le théorème 1.1 ψ est semblable à γ. Ainsi, $\varphi_{F(\gamma)}$ est isotrope. Puisque $F(\gamma)$ est isomorphe à $F(t)(\theta)$, on obtient par la proposition 5.4 que

$$\varphi_{F(t)} \cong r(\beta\,[1, a + b] \perp \alpha\,[1, b] \perp \left[t^2 + t + a\right]) \tag{23}$$

pour un certain $r \in F(t)^*$. Par le lemme 4.2 on a $r(t^2+t+a)\beta \in F(t)^2$. Ainsi,

$$\varphi_{F(t)} \cong (t^2+t+a)(\alpha\beta\,[1,b] \perp [1,a+b]) \perp [\beta]\,. \tag{24}$$

Soient $\xi = \alpha\beta\,[1,b] \perp [1,a+b]$, $\xi' = [\alpha] \perp [\beta]$ et $L = F[t]/(t^2+t+a)$. Puisque ξ est anisotrope et $\triangle(\xi) = a$, on a ξ_L anisotrope (lemme 4.3). Aussi, la forme ξ'_L est anisotrope (proposition 1.1). Par l'équation (24), on a

$$\alpha \in D_{F(t)}((t^2+t+a)\xi \perp [\beta]).$$

Ainsi, il existe $P, Q \in F\,[t]$ et $R \in F\,[t]^4$ tels que

$$\alpha P^2 = (t^2+t+a)\xi(R) + \beta Q^2. \tag{25}$$

En étendant l'équation (25) au corps L, on déduit que

$$\overline{\alpha P^2} = \overline{\beta Q^2}$$

où $\bar{\ }$ désigne la classe modulo t^2+t+a. Puisque ξ'_L est anisotrope, on déduit que $P = (t^2+t+a)P'$ et $Q = (t^2+t+a)Q'$ pour certains polynômes $P', Q' \in F\,[t]$. En substituant dans l'équation (25) et en simplifiant par t^2+t+a, on obtient que

$$(t^2+t+a)\alpha(P')^2 = \xi(R) + (t^2+t+a)\beta(Q')^2. \tag{26}$$

En étendant cette fois-ci l'équation (26) au corps L, on obtient que

$$\overline{\xi(R)} = 0.$$

Puisque ξ_L est anisotrope, on a $R = (t^2+t+a)R'$ pour un certain $R' \in F\,[t]^4$. En substituant dans l'équation (26) et en simplifiant par t^2+t+a, on obtient

$$\alpha(P')^2 = (t^2+t+a)\xi(R') + \beta(Q')^2. \tag{27}$$

On est ramené à l'analogue de l'équation (25) avec des polynômes P', Q' et R' de degré strictement inférieurs à ceux des polynômes P, Q et R. On reprend de nouveau ce qu'on vient de faire à partir de l'équation (25) jusqu'à ce qu'on aboutit à une contradiction. ∎

A cette étape, la deuxième assertion du théorème est démontrée.

PROPOSITION 5.6: *Supposons que ψ soit anisotrope de dimension 4 et de type $(1,2)$ ou totalement singulière de dimension 3. Alors, $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si il existe φ' une forme de dimension 5 et de type $(2,1)$, $\pi \in GP_2F$ telles que $\varphi \sim \pi \perp \varphi'$ et que ψ soit faiblement dominée par π et φ'.*

Preuve: Soit ψ une forme comme dans la proposition. Il est clair que la condition donnée dans la proposition implique que $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope. Réciproquement, supposons que $\varphi_{F(\psi)}$ soit isotrope. Modulo un scalaire, on suppose $\psi = [1] \perp \xi$ avec $\dim \xi = 3$ (resp. $\dim \xi = 2$) lorsque ψ est de type $(1,2)$ (resp. lorsque ψ est de type $(0,3)$). On pose $\sigma = \beta\,[1,a] \perp \alpha\beta\,[1,b]$ et

$$\xi = \begin{cases} \alpha'\,[1,a'] \perp [\beta'] & \text{si } \psi \text{ est de type } (1,2), \\ [r] \perp [s] & \text{si } \psi \text{ est de type } (0,3). \end{cases}$$

On va montrer qu'il existe $\eta = [1,\nu] \perp \mu$ non singulière de dimension 6 telle que:

- ξ soit dominée par μ,
- $1 \in D_{F(\psi)}(\mu_{F(\psi)})$,
- $\sigma \perp \eta$ ait des invariants d'Arf et de Clifford triviaux.

Puisque $\gamma_{F(\psi)}$ est isotrope, il existe $u, b', m, n \in F^*$ tels que

$$u\gamma \cong \begin{cases} \alpha'\,[1,a'] \perp \beta'\,[1,b'] \perp [1, a'+b'] & \text{si } \psi \text{ est de type } (1,2), \\ r\,[1,m] \perp s\,[1,n] \perp [1, m+n] & \text{si } \psi \text{ est de type } (0,3). \end{cases} \tag{28}$$

D'une part on a

$$C(u\gamma) \sim C_0(\varphi) \sim [b, \alpha\beta) \otimes_F [a, \beta)$$

et d'autre part

$$C(u\gamma) \sim \begin{cases} [a', \alpha') \otimes_F [b', \beta') & \text{si } \psi \text{ est de type } (1,2), \\ [m, r) \otimes_F [n, s) & \text{si } \psi \text{ est de type } (0,3). \end{cases}$$

La forme

$$\lambda = \begin{cases} \sigma \perp \alpha'\,[1,a'] \perp \beta'\,[1,b'] \perp [1, a+b+a'+b'] & \text{si } \psi \text{ est de type } (1,2) \\ \sigma \perp r\,[1,m] \perp s\,[1,n] \perp [1, a+b+m+n] & \text{si } \psi \text{ est de type } (0,3) \end{cases}$$

est de dimension 10 et vérifie $\triangle(\lambda) = 0$ et $C(\lambda) \sim 0$. Alors, on prend

$$\mu = \begin{cases} \alpha'\,[1,a'] \perp \beta'\,[1,b'] & \text{si } \psi \text{ est de type } (1,2) \\ r\,[1,m] \perp s\,[1,n] & \text{si } \psi \text{ est de type } (0,3) \end{cases}$$

et

$$\nu = \begin{cases} a+b+a'+b' & \text{si } \psi \text{ est de type } (1,2), \\ a+b+m+n & \text{si } \psi \text{ est de type } (0,3). \end{cases}$$

Clairement, $\xi \preccurlyeq \mu$. Puisque $\dim \lambda = 10$ il existe $\pi \in GP_2F$ tel que $\lambda \sim \pi$, c'est-à-dire,

$$\sigma \sim \pi \perp \eta.$$

On ajoute de part et d'autre dans la dernière égalité la forme [1] et on utilise le lemme 3.1 pour déduire que

$$\varphi \sim \beta\pi \perp \varphi'$$

où $\varphi' = \beta(\mu \perp [1])$. Puisque $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope et $\sigma_{F(\psi)}$ est anisotrope (théorème 1.3), on obtient que $\sigma_{F(\psi)}$ représente 1. Par définition de $F(\psi)$, la forme $\xi_{F(\psi)}$ représente 1. Ce qui implique que $\mu_{F(\psi)}$ représente 1 (car $\xi \preccurlyeq \mu$). Ainsi,

$$(\beta\,[1,a] \perp \alpha\beta\,[1,b])_{F(\psi)} \cong [1,e] \perp \xi_1$$

et

$$\mu_{F(\psi)} \cong [1,f] \perp \xi_2$$

pour $e, f \in F(\psi)$ et ξ_1, ξ_2 des $F(\psi)$-formes de dimension 2. Clairement,

$$\lambda_{F(\psi)} \sim \xi_1 \perp \xi_2 \perp [1, e+f+\nu] \sim \pi_{F(\psi)}.$$

Par le Hauptsatz d'Arason-Pfister, on conclut que $\pi_{F(\psi)}$ est isotrope et donc ψ est faiblement dominée par π. De plus, on a $\beta\psi \preccurlyeq \varphi'$. ∎

PROPOSITION 5.7: (1) *Si $\psi \in P_1F$, alors $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si φ domine une voisine de ψ.*

(2) *Si $\psi = [1] \perp [\alpha_1] \perp [\alpha_2] \perp [\alpha_3] \in \mathrm{Exc}(F)$ avec $\eta := [1] \perp [\alpha_1] \perp [\alpha_2]$ isotrope sur $F(\sqrt{\alpha_3})$, alors $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si $\varphi_{F(\eta)}$ est isotrope.*

Preuve: Soit ψ comme dans la proposition. Supposons que $\varphi_{F(\psi)}$ soit isotrope.

(1) Si $\psi \in P_1F$. Posons $\psi = [1,a] \perp b\,[1,a]$ et soit $\rho = [1] \perp b\,[1,a]$ qui est une voisine de ψ. Puisque $\psi_{F(\rho)}$ est isotrope, la forme $\varphi_{F(\rho)}$ l'est aussi. Par la proposition 5.4 il existe $c \in F^*$ tel que $c\rho \preccurlyeq \varphi$. La forme $c\rho$ est une voisine de ψ et dominée par φ.

(2) Par le lemme 4.5 $\varphi_{F(\eta)}$ est isotrope. Réciproquement, si $\varphi_{F(\eta)}$ est isotrope, alors il existe φ' non voisine de dimension 5 et de type $(2,1)$ et $\pi \in GP_2F$ tels que $\varphi \sim \varphi' \perp \pi$ et que η soit faiblement dominée par φ' et π. Par la proposition 4.10 $\eta_{F(\psi)}$ est isotrope, et donc $\varphi'_{F(\psi)}$ et $\pi_{F(\psi)}$ sont isotropes. En particulier, $\varphi_{F(\psi)} \cong \varphi'_{F(\psi)}$ et donc $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope. ∎

Ainsi, le théorème est démontré.

3 - DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.3. Modulo un scalaire, on suppose $\varphi = [1,a] \perp b\,[1,a']$. Soient $L = F(\wp^{-1}(a+a'))$ et $\tau = [1,a] \perp b\,[1,a]$. On a $\varphi_L \cong \tau_L \in P_1L$ qui est anisotrope par le lemme 4.3. Supposons que $\varphi_{F(\psi)}$ soit isotrope. Alors, $\varphi_{L(\psi)} \sim 0$. Par la proposition 3.4 ψ_L est faiblement dominée par φ_L. En particulier, $\dim \psi \leq 4$.

(1) Si ψ est de l'un des types suivants:

- ψ est totalement singulière de dimension 3,
- ψ est singulière de dimension 4,

alors ψ domine une forme totalement singulière de dimension 3 et donc il en est de même pour φ_L, une contradiction.

A cette étape la première assertion du théorème est démontrée.

(2) Si ψ est de dimension 2: Lorsque ψ est non singulière (resp. singulière), alors d'après [3, Theorem 4.2, Page 121] (resp. d'après [2, Page 182]) ψ est faiblement dominée par φ.

(3) Si ψ est non singulière de dimension 4: Alors, τ_L est semblable à ψ_L et $\triangle(\psi_L) \in \wp(L)$. La condition $\triangle(\psi_L) \in \wp(L)$ implique que $\triangle(\psi) \in \wp(F)$ ou $\triangle(\psi) = \triangle(\varphi)$.

(3.1) Si $\triangle(\psi) = \triangle(\varphi)$, alors φ est semblable à ψ [21].

(3.2) Si $\triangle(\psi) \in \wp(F)$, alors $\psi \in GP_1F$. Modulo un scalaire, on suppose $\psi = [1,x] \perp y\,[1,x]$. Posons $\psi' = [1,x] \perp y\,[1, x+\triangle(\varphi)]$. Puisque $\psi_L \cong \psi'_L$, on obtient que $\varphi_L \cong (\psi')_L$. Puisque $\triangle(\psi') = \triangle(\varphi)$, on déduit par le cas **(3.1)** qu'il existe $e \in F^*$ tel que $\varphi \cong e\psi'$. Ainsi, la forme $e([1,x] \perp [y])$ est une voisine de ψ et dominée par φ.

(4) Si ψ est de dimension 3 et de type $(1,1)$: Modulo un scalaire, on suppose $\psi = [1] \perp \alpha\,[1,\beta]$. La forme ψ est voisine de $\rho := [1,\beta] \perp \alpha\,[1,\beta] \in P_1F$. Puisque $\psi_{F(\rho)}$ est isotrope, on déduit que $\varphi_{F(\rho)}$ est isotrope. D'après le cas **(3.2)**, il existe $g \in F^*$ et une voisine ψ' de ρ tel que $\psi' \preccurlyeq g\varphi$. Par le lemme 4.4 les formes ψ et ψ' sont semblables. Par conséquent, ψ est faiblement dominée par φ.

A cette étape la deuxième et la troisième assertion du théorème sont démontrées.

4 - DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.4. Modulo un scalaire, on suppose $\varphi = x\,[1,a] \perp [y] \perp [1]$. Par le corollaire 4.1 la forme $\theta = x\,[1,a] \perp y\left[1,t^{-1}\right] \perp [1]$ est anisotrope et non voisine sur $L := F((t))$. Posons $\tau = [1,a] \perp x\,[1,a]$, $\gamma = x\,[1,a] \perp y\left[1,t^{-1}\right] \perp \left[1, t^{-1}+a\right]$ qui est anisotrope sur L (proposition 4.4). Par [22, Lemma 2] la première forme résiduelle (resp. la seconde forme résiduelle) de θ est φ (resp. $[y]$). De même, la première forme résiduelle (resp. la seconde forme résiduelle) de γ est φ (resp. $[y] \perp [1]$).

PROPOSITION 5.8: *Soit ψ une forme anisotrope qui est de l'un des types suivants:*

(1) $\dim \psi \geq 5$,

(2) *ψ est non singulière de dimension 4 n'appartenant pas à GP_1F,*

(3) *ψ est totalement singulière de dimenison 4 n'appartenant pas à* $\mathrm{GExc}(F)$.

Alors, $\varphi_{F(\psi)}$ est anisotrope.

Preuve: Soit ψ comme dans la proposition.

(1) Si $\dim \psi \geq 6$, alors par le théorème 1.2 la forme $\theta_{L(\psi)}$ est anisotrope, et donc $\varphi_{F(\psi)}$ l'est aussi.

(2) Si $\dim \psi = 5$: Supposons que $\varphi_{F(\psi)}$ soit isotrope. Alors, $\theta_{L(\psi)}$ l'est aussi. Par le théorème 1.2 on déduit que ψ_L n'est pas voisine, de type $(2,1)$ et $r\psi_L \cong \theta$ pour un certain $r \in L^*$. Ecrivons $\psi = \xi \perp [z]$ pour certains $z \in F^*$ et ξ une forme de dimension 4 non singulière. Par le lemme 4.2 on déduit que $zr \in F((t))^2$. Ainsi,

$$r\xi \perp [1] \cong x\,[1,a] \perp y\left[1,t^{-1}\right] \perp [1]. \tag{29}$$

Modulo un carré, on peut supposer que $r = st^{\epsilon}$ avec $s \in F[[t]]$ une unité et $\epsilon \in \{0,1\}$. Notons s' la classe résiduelle de s. Si $\epsilon = 0$ (resp. $\epsilon = 1$), alors la première forme résiduelle de $r\xi \perp [1]$ est $s'\xi \perp [1]$ qui est de dimension 5 (resp. est la forme $[1]$). Clairement on a une contradiction sur les dimensions des premières formes résiduelles des deux membres de l'équation (29). Ainsi, $\varphi_{F(\psi)}$ est anisotrope.

(3) Si ψ est non singulière de dimension 4 n'appartenant pas à GP_1F: Supposons que $\varphi_{F(\psi)}$ soit isotrope. Alors, $\theta_{L(\psi)}$ l'est aussi, et par le théorème 1.2 on a

$$u\psi \perp [v] \cong \theta \tag{30}$$

pour certains $u, v \in L^*$. Par le lemme 4.2 on peut remplacer v par 1. Maintenant on est dans les mêmes conditions que dans le cas **(2)** pour déduire une contradiction.

(4) Si ψ est totalement singulière de dimension 4 n'appartenant pas à $\mathrm{GExc}(F)$: Le théorème 1.2 implique que $\theta_{L(\psi)}$ est anisotrope et par conséquent $\varphi_{F(\psi)}$ l'est aussi. ∎

A cette étape la première assertion du théorème 1.4 est démontrée.

PROPOSITION 5.9: *Soit ψ une forme anisotrope.*

(1) *Supposons que ψ soit singulière de dimension 2. Alors, $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si il existe ξ une forme totalement singulière de dimension 3 qui est faiblement dominée par φ et qui domine ψ.*

(2) *Supposons que ψ soit non singulière de dimension 2 ou de dimension 3 et de type $(1,1)$. Alors, $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si ψ est faiblement dominée par φ.*

Preuve: Soit ψ comme dans la proposition. Il est clair que les conditions données dans la proposition impliquent que $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope. Réciproquement, supposons que $\varphi_{F(\psi)}$ soit isotrope.

(1) Si ψ est singulière de dimension 2: Modulo un scalaire, on suppose $\psi = [1] \perp [d]$. Puisque $\gamma_{L(\psi)}$ est isotrope, on déduit que

$$\gamma \cong r([1,u] \perp d\,[1,v] \perp w\,[1,u+v]) \tag{31}$$

pour $u, v, r, w \in L^*$. Modulo un carré on peut supposer que $r = st^{\epsilon}$ avec $s \in F\,[[t]]$ une unité et $\epsilon \in \{0,1\}$. Posons s' la classe résiduelle de s.

- Si $\epsilon = 1$. Par raison de dimension et par la proposition 4.11 on déduit que $[1] \perp [y] \cong s'([1] \perp [d])$, et donc ψ est faiblement dominée par φ.
- Si $\epsilon = 0$. On applique la proposition 4.11 à la forme $r([1,u] \perp d\,[1,v])$ pour déduire que l'espace sous-jacent à φ contient deux vecteurs x, y tels que $B_\varphi(x,y) = 0$ et $\varphi(x) = d\varphi(y)$. Puisque ψ est anisotrope, on déduit de la relation $\varphi(x) = d\varphi(y)$ que x et y sont linéairement indépendants. Pour finir, on applique le corollaire 4.2.

(2) (i) Si ψ est non singulière de dimension 2: Modulo un scalaire, on suppose $\psi = [1,d]$. Alors, $\varphi_{F(u)}$ est isotrope où u vérifie $u^2 + u = d$. Soit

$$v = (\alpha_1 + \beta_1 u, \ldots, \alpha_4 + \beta_4 u) \in F(u)^4$$

non nul tel que $\varphi(v) = 0$. Puisque ψ est anisotrope, l'extension $F(u)/F$ est quadratique. Un simple calcul montre que

$$\varphi(w) = d\varphi(w')$$

et

$$B_\varphi(w, w') = \varphi(w')$$

où $w = (\alpha_1, \ldots, \alpha_4)$ et $w' = (\beta_1, \ldots, \beta_4)$. Puisque φ est anisotrope et $v \neq 0$, on a $B_\varphi(w,w') \neq 0$ et les vecteurs w et w' sont linéairement indépendants. Ainsi, l'espace $W := Fw \oplus Fw'$ est non singulier, et donc $F^4 = W \oplus W^\perp$ où $W^\perp$ est l'orthogonal de W relativement à B_φ. La restriction de φ à W est $\varphi(w')\,[1,d]$. Ainsi, ψ est faiblement dominée par φ.

(ii) Si ψ est de dimension 3 et de type $(1,1)$: Modulo un scalaire, on suppose $\psi = [1,b] \perp [z]$. Puisque $\theta_{L(\psi)}$ est isotrope, on déduit par le théorème 1.2 qu'on a l'un des deux cas suivants:

(ii.1) $\theta \cong \beta([1,b] \perp [v,w] \perp [z])$ avec $\beta, v, w \in L^*$, ou

(ii.2) $\theta \cong \alpha([1,b] \perp z\,[1,k] \perp [l])$ avec $\alpha, l, k \in L^*$.

Supposons qu'on soit dans le cas (ii.1). Par le lemme 4.2 on peut supposer que $z\beta = 1$. Donc on a

$$\theta \cong z([1,b] \perp [v,w]) \perp [1].$$

Par la proposition 4.11 l'espace V sous-jacent à φ contient un sous-espace W de dimension 3 tel que la restriction de φ à W soit $z\,[1,b] \perp [1]$. Soit U un sous-espace de W (donc un sous-espace de V) dont la restriction de φ est $z\,[1,b]$. Puisque U est non singulier, on a $V = U \oplus U^\perp$ où $U^\perp$ est l'orthogonal de U relativement à B_φ. Aussi, il existe $v \in W \cap U^\perp$ tel que $\varphi(v) = 1$. Puisque φ est de type $(1,2)$, on obtient que $\varphi \cong z\,[1,b] \perp [1] \perp [e]$ pour un certain $e \in F^*$, c'est-à-dire, ψ est faiblement dominée par φ.

Supposons qu'on soit dans le cas (ii.2). Modulo un carré on peut supposer que $\alpha = st^\epsilon$ avec $s \in F[[t]]$ une unité et $\epsilon \in \{0,1\}$. Remarquons que par le lemme 4.2 on peut supposer que $l\alpha = 1$. Donc on a

$$\theta \cong st^\epsilon([1,b] \perp z\,[1,k]) \perp [1].$$

Notons s' la classe résiduelle de s.

• Si $\epsilon = 1$. Par raison de dimension ceci n'est pas possible en appliquant la proposition 4.11 à la forme $st^\epsilon([1,b] \perp z\,[1,k])$ et en comparant les secondes formes résiduelles.

• Si $\epsilon = 0$. Par la proposition 4.11 on a que l'espace sous-jacent à φ contient un sous-espace dont la restriction de φ est $s'([1,b] \perp [z])$. On finit la preuve comme dans le cas (ii.1) pour montrer que ψ est faiblement dominée par φ. ∎

Proposition 5.10: *Soit ψ une forme anisotrope de dimension* 4 *et de type* $(1,2)$. *Alors, $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si ψ est faiblement dominée par φ.*

Preuve: Modulo un scalaire on suppose que $\psi = \alpha\,[1,e] \perp [\beta] \perp [1]$. Supposons que $\varphi_{F(\psi)}$ soit isotrope. Alors, $\gamma_{L(\psi)}$ l'est aussi. Par le théorème 1.1 on a

$$\gamma \cong r(\alpha\,[1,e] \perp \beta\,[1,u] \perp [1,e+u]) \tag{32}$$

pour certains $r, u \in L^*$. Modulo un carré on peut supposer que $r = st^\epsilon$ avec $s \in F[[t]]$ une unité et $\epsilon \in \{0, 1\}$. Notons s' la classe résiduelle de s.

• Si $\epsilon = 1$. Par la proposition 4.11 on obtient que la seconde forme résiduelle de γ domine une forme de dimension 4, une contradiction.

• Si $\epsilon = 0$. Par la proposition 4.11 on obtient que la première forme résiduelle de γ (qui est φ) domine la forme $r'\psi$, et par conséquent $\varphi \cong r'\psi$. ∎

PROPOSITION 5.11: *Soit ψ une forme anisotrope et totalement singulière de dimension* 3. *Alors, $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si ψ est faiblement dominée par φ.*

Preuve: Posons $\psi = [x] \perp [y] \perp [z]$. Supposons que $\varphi_{F(\psi)}$ soit isotrope. Alors, $\gamma_{L(\psi)}$ l'est aussi. Par le théorème 1.1 on obtient

$$\gamma \cong st^\epsilon(x[1,k] \perp y[1,l] \perp z[1,k+l]) \tag{33}$$

avec $s \in F[[t]]$ une unité, $\epsilon \in \{0,1\}$ et $k, l \in L^*$. Notons s' la classe résiduelle de s.

• Si $\epsilon = 1$. Par la proposition 4.11 on obtient que la seconde forme résiduelle de γ domine une forme de dimension 3, une contradiction.

• Si $\epsilon = 0$. Par la proposition 4.11 l'espace sous-jacent à φ contient une famille libre de trois vecteurs u, v, w deux à deux orthogonaux tels que $\varphi(u) = s'x$, $\varphi(v) = s'y$ et $\varphi(w) = s'z$. On applique la proposition 4.6 pour déduire que ψ est faiblement dominée par φ. ∎

PROPOSITION 5.12: (1) *Si $\psi \in P_1F$ anisotrope, alors $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si φ domine une voisine de ψ.*

(2) *Si $\psi = [1] \perp [\alpha_1] \perp [\alpha_2] \perp [\alpha_3] \in \mathrm{Exc}(F)$ avec $\eta := [1] \perp [\alpha_1] \perp [\alpha_2]$ isotrope sur $F(\sqrt{\alpha_3})$, alors $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si η est faiblement dominée par φ.*

Preuve: **(1)** Soit ρ une voisine de ψ de dimension 3. Si $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope, alors $\varphi_{F(\rho)}$ l'est aussi. Par la proposition 5.9 il existe $c \in F^*$ tel que $c\rho \preccurlyeq \varphi$. La forme $c\rho$ est une voisine de ψ et dominée par φ.

(2) C'est une conséquence du lemme 4.5 et des propositions 5.11 et 4.10. ∎

Ainsi, le théorème est démontré.

5 - DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.5. Soient φ et ψ comme dans le théorème 1.5.

1 - Cas où φ est de type $(1,1)$. Modulo un scalaire, on pose $\varphi = x\,[1,a] \perp [1]$. Soit $\overline{\varphi} = x\,[1,a] \perp [1,a] \in P_1F$ qui est anisotrope. Supposons que $\varphi_{F(\psi)}$ soit isotrope. Alors, $\overline{\varphi}_{F(\psi)}$ est isotrope et donc hyperbolique. Par la proposition 3.4 ψ est faiblement dominée par φ. En particulier, $\dim\psi \leq 4$ et ψ ne peut être ni totalement singulière de dimension 3 ni de dimension ≥ 4 avec $\psi \notin GP_1F$.

(1) Si ψ est de dimension 3 et de type $(1,1)$: Puisque $a\psi \preccurlyeq \overline{\varphi}$ pour un certain $a \in F^*$ et $\varphi \preccurlyeq \overline{\varphi}$, on déduit par le lemme 4.4 que ψ et φ sont semblables.

(2) Si ψ est de dimension 2: Soit $b \in F^*$ tel que $\psi \preccurlyeq b\overline{\varphi}$. Soit ξ une forme de dimension 3 et de type $(1,1)$ telle que $\xi \preccurlyeq b\overline{\varphi}$ et que $\psi \preccurlyeq \xi$. Puisque $\varphi \preccurlyeq \overline{\varphi}$ on déduit par le lemme 4.4 que ξ et φ sont semblables et donc ψ est faiblement dominée par φ.

(3) Si $\psi \in P_1F$: Alors $\psi \cong \overline{\varphi}$ et donc φ est voisine de ψ.

Ainsi, la partie **(1)** du théorème 1.5 est démontrée.

2 - Cas où φ est de type $(0,3)$. Posons $\varphi = [x] \perp [y] \perp [z]$. Soit

$$\widetilde{\varphi} = x\left[1, t^{-1}\right] \perp [y] \perp [z]$$

qui est anisotrope sur $L := F((t))$ (proposition 4.5). Soit ψ une forme quadratique anisotrope de dimension ≥ 2 telle que $\varphi_{F(\psi)}$ soit isotrope. Par le corollaire 3.3 la forme ψ est totalement singulière. Puisque $\widetilde{\varphi}_{L(\psi)}$ est isotrope, on obtient par le théorème 1.4 que $\dim\psi \leq 3$ ou $\psi \in \mathrm{GExc}(F)$.

(1) Si $\dim\psi = 2$: Modulo un scalaire, on suppose que $\psi = [1] \perp [d]$ pour $d \in F$. On a $F(\psi) = F(\sqrt{d})$. Puisque $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope, il existe

$$(k_1 + l_1\sqrt{d}, k_2 + l_2\sqrt{d}, k_3 + l_3\sqrt{d}) \in F(\sqrt{d})^3$$

non nul tel que $\varphi(k_1 + l_1\sqrt{d}, k_2 + l_2\sqrt{d}, k_3 + l_3\sqrt{d}) = 0$. Puisque ψ est anisotrope, l'extension $F(\sqrt{d})/F$ est quadratique. Un simple calcul implique que

$$\varphi(v) = d\varphi(w)$$

et

$$B_\varphi(v,w) = 0$$

où $v = (k_1,k_2,k_3)$ et $w = (l_1,l_2,l_3)$. On a $\varphi(v) \neq 0$ et donc $\varphi(w) \neq 0$, car sinon on aurait $v = w = 0$ du fait que φ est anisotrope, ce qui est impossible. La famille $\{v,w\}$ est libre car sinon on aurait $w = \alpha v$ pour un certain $\alpha \in F^*$. Par conséquent, $\varphi(v) = \alpha^2 d\varphi(v)$, ce qui donne que d est un carré et donc ψ est isotrope, une contradiction. En complétant $\{v,w\}$ en une base de F^3, on déduit que $\varphi \cong e([1] \perp [d]) \perp [f]$ pour certains $e, f \in F^*$.

(2) Si ψ est totalement singulière de dimension 3: On pose $\psi = [k] \perp [l] \perp [m]$. Puisque $\widetilde{\varphi}_{L(\psi)}$ est isotrope, on obtient par le théorème 1.4 que ψ_L est faiblement dominée par $\widetilde{\varphi}$. Quitte à échanger les éléments k, l, m, on peut supposer que

$$\widetilde{\varphi} \cong r(k\,[1,u] \perp [l] \perp [m]) \tag{34}$$

pour certains $r, u \in L^*$. La première forme résiduelle de $\widetilde{\varphi}$ est φ et la seconde forme résiduelle est $[x]$ [22, Lemma 2]. Modulo un carré on peut supposer que $r = st^{\epsilon}$ avec $s \in F\,[[t]]$ une unité et $\epsilon \in \{0,1\}$. Soit s' la classe résiduelle de s.

• Si $\epsilon = 1$. Par la proposition 4.11 on obtient que la seconde forme résiduelle de $\widetilde{\varphi}$ domine une forme de dimension 3, une contradiction.

• Si $\epsilon = 0$. Par la proposition 4.11 et en comparant les premières formes résiduelles, on obtient que $\varphi \cong s'\psi$.

(3) Si $\psi = [1] \perp [\alpha_1] \perp [\alpha_2] \perp [\alpha_3] \in \mathrm{Exc}(F)$ avec $\eta := [1] \perp [\alpha_1] \perp [\alpha_2]$ isotrope sur $F(\sqrt{\alpha_3})$. Par le lemme 4.5 on a $\varphi_{F(\eta)}$ isotrope. Par le cas **(2)** on a que φ est semblable à η. Réciproquement, si φ est semblable à η, alors la proposition 4.10 implique que $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope.

Ainsi, le théorème est démontré.

6- Démonstration de la proposition 1.1. Soient φ et ψ comme dans la proposition.

(1) Supposons que φ soit non singulière: Si $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope, alors $\varphi_{F(\psi)}$ est hyperbolique. Ainsi, par la proposition 3.4 on déduit que ψ est faiblement dominée par φ. En particulier, $\dim \psi = 2$ et ψ est non singulière.

(2) Supposons que φ soit singulière: Modulo un scalaire, on suppose que $\varphi = [1] \perp [b]$ pour $b \in F^*$. Si $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope, alors ψ est totalement singulière (corollaire 3.3).

(i) Si ψ est de dimension 2: Modulo un scalaire on suppose $\psi = [1] \perp [d]$. Il est clair que $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si $b \in F(\sqrt{d})^2$ si et seulement si la forme $[1] \perp [b] \perp [d]$ est isotrope.

(ii) Si ψ est de dimension 3: Modulo un scalaire, on suppose que $\psi = [1] \perp [r] \perp [s]$ pour $r, s \in F^*$. Si $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope, alors la forme φ est isotrope sur les corps des fonctions des formes $[1] \perp [r]$ et $[1] \perp [s]$ (lemme 4.5). D'après le cas (i) il existe $e, f, g, h \in F$ tels que $b = e^2 + rf^2 = g^2 + sh^2$. Ainsi, $(e+g)^2 + rf^2 + sh^2 = 0$. Puisque ψ est anisotrope, on a $f = h = 0$, et donc $b \in F^2$, une contradiction car φ est anisotrope.

(iii) Si ψ est de dimension ≥ 3: Par le cas (ii) on déduit que $\varphi_{F(\psi)}$ est anisotrope et ce en passant par une sous-forme de ψ de dimension 3 et en utilisant le lemme 4.5.

Ainsi, la proposition est démontrée.

Références

[1] A. A. Albert, *Structure of Algebras,* American Mathematical Society Colloquium Publication **XXIV**, 1939.

[2] R. Baeza, *Ein Teilformensatz für quadratische Formen in Charakteristik* 2, Mathematische Zeitschrift **135** (1974), 175–184.

[3] R. Baeza, *Quadratic forms over semilocal rings,* Lecture Notes in Mathematics **655**, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1978.

[4] R. Baeza, *Common splitting rings of quaternion algebras over semi-local rings,* in *Proceedings of the 1976 Conference on Quadratic Forms* (G. Orzech, ed.), Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics **46**, Queens University, Kingston, Ontario, 1977, pp. 373–376.

[5] R. Baeza, *The norm theorem for quadratic forms over a field of characteristic* 2, Communications in Algebra **18** (1990), 1337–1348.

[6] R. W. Fitzgerald, *Witt kernels of functions fields extensions,* Pacific Journal of Mathematics **109** (1983), 89–106.

[7] D. W. Hoffmann, *Isotropy of 5-dimensional quadratic forms over the function field of a quadric,* Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 58, AMS Summer Research Institute, Santa Barbara, 1992, pp. 217–225.

[8] D. W. Hoffmann, *On 6-dimensional quadratic forms isotropic over the function fields of a quadric,* Communications in Algebra **22** (1994), 1999–2014.

[9] D. W. Hoffmann, *Isotropy of quadratic forms over the function field of a quadric,* Mathematische Zeitschrift **220** (1995), 461–476.

[10] D. W. Hoffmann, *On quadratic forms of height two and a theorem of Wadsworth,* Transactions of the American Mathematical Society **348** (1996), 3267–3281.

[11] O. T. Izhboldin and N. A. Karpenko, *Isotropy of 6-dimensional quadratic forms over function fields of quadrics,* Journal of Algebra **209** (1998), 65–93.

[12] O. T. Izhboldin and N. A. Karpenko, *Isotropy of virtual Albert forms over function fields of quadrics,* Mathematische Nachrichten **206** (1999), 111–122.

[13] N. Jacobson, *Some applications of Jordan norms to involutorial simple associative algebras,* Advances in Mathematics **48** (1983), 149–165.

[14] M. Knebusch, *Specialization of quadratic and symmetric bilinear forms, and a norm theorem,* Acta Arithmetica **24** (1973), 279–299.

[15] M.-A. Knus, *Sur la forme d'Albert et le produit tensoriel de deux algèbres de quaternions,* Bulletin de la Société Mathématique de Belgique–Tijdsch. Belg. Wisk. Gen. 45 **3**, Ser. B (1993), 333–337.

[16] A. Laghribi, *Isotropie de certaines formes quadratiques de dimensions 7 et 8 sur le corps des fonctions d'une quadrique,* Duke Mathematical Journal **85** (1996), 397–410.

[17] A. Laghribi, *Formes quadratiques en* 8 *variables dont l'algèbre de Clifford est d'indice* 8, K-Theory **12** (1997), 371–383.

[18] A. Laghribi, *Formes quadratiques de dimension* 6, Mathematische Nachrichten **204** (1999), 125–135.

[19] A. Laghribi et P. Mammone, *Isotropie d'une forme quadratique sur le corps des fonctions d'une quadrique en caractéristique* 2, à paraître dans Bulletin de la Société Mathématique de Belgique.

[20] D. Leep, *Function fields results,* notes manuscrites prises par T. Y. Lam, 1989.

[21] P. Mammone, *Similitude de formes quadratiques et corps de fonctions en caractéristique* 2, Bulletin de la Société Mathématique de Belgique **39** (1987), 373–377.

[22] P. Mammone, R. Moresi and A. Wadsworth, *u-Invariant of fields of characteristic* 2, Mathematische Zeitschrift **208** (1991), 335–347.

[23] P. Mammone and D. Shapiro, *The Albert quadratic form for an algebra of degree four,* Proceedings of the American Mathematical Society **105** (1989), 525–530.

[24] P. Mammone, J.-P. Tignol and A. Wadsworth, *Fields of characteristic* 2 *with prescribed u-invariant,* Mathematische Annalen **290** (1991), 109–128.

[25] A. S. Merkur'ev, *Simple algebras and quadratic forms* (en Russe), Izvestiya Akademii Nauk SSSR **55** (1991), 218–224. Traduction anglaise: Mathematics of the USSR-Izvestiya **38** (1992), 215–221.

[26] W. Scharlau, *Quadratic and Hermitian Forms,* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 270, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985.

[27] D. Shapiro, *Similarities, quadratic forms, and Clifford algebras,* Thesis, University of California, Berkeley, 1974.

[28] T. A. Springer, *Quadratic forms over fields with a discrete valuation I,* Indagationes Mathematicae **17** (1955), 352–362.

[29] J. Tits, *Sur les produits tensoriels de deux algèbres de quaternions,* Bulletin de la Société Mathématique de Belgique–Tijdsch. Belg. Wisk. Gen. 45 **3**, Ser. B (1993), 329–331.